

Принципы построения моделей. Классификация моделей

Математическая модель — математическое представление реальности, один из вариантов модели, как системы, исследование которой позволяет получать информацию о некоторой другой системе.

Процесс построения и изучения математических моделей называется **математическим моделированием**.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути занимаются математическим моделированием: заменяют объект исследования его математической моделью и затем изучают последнюю. Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования.



Определения

Никакое определение не может в полном объёме охватить реально существующую деятельность по математическому моделированию. Несмотря на это, определения полезны тем, что в них делается попытка выделить наиболее существенные черты.

По Ляпунову, математическое моделирование — это опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель), находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом, способная замещать его в определенных отношениях и дающая при её исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте.

В других вариантах, математическая модель определяется как объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала, как «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям», как систему уравнений, или арифметических соотношений, или геометрических фигур, или комбинацию того и другого, исследование которых средствами математики должно ответить на поставленные вопросы о свойствах некоторой совокупности свойств объекта реального мира, как совокупность математических соотношений, уравнений, неравенств, описывающих основные закономерности, присущие изучаемому процессу, объекту или системе.



Формальная классификация моделей

Формальная классификация моделей основывается на классификации используемых математических средств. Часто строится в форме дихотомий. Например, один из популярных наборов дихотомий:

- Линейные или нелинейные модели;
- Сосредоточенные или распределённые системы;
- Детерминированные или стохастические;
- Статические или динамические;
- Дискретные или непрерывные.

и так далее. Каждая построенная модель является линейной или нелинейной, детерминированной или стохастической. Естественно, что возможны и смешанные типы: в одном отношении сосредоточенные (по части параметров), в другом — распределённые модели и т. д.



Классификация по способу представления объекта

Наряду с формальной классификацией, модели различаются по способу представления объекта:

- *Структурные модели* представляют объект как систему со своим устройством и механизмом функционирования.
- *Функциональные модели* не используют таких представлений и отражают только внешне воспринимаемое поведение (функционирование) объекта. В их предельном выражении они называются также моделями «чёрного ящика».
- Возможны также комбинированные типы моделей, которые иногда называют моделями «серого ящика».



Содержательная классификация моделей

В работе Пайерлса дана классификация математических моделей, используемых в физике и, шире, в естественных науках. В книге А.Н. Горбаня и Р. Г. Хлебопроста эта классификация проанализирована и расширена. Эта классификация сфокусирована, в первую очередь, на этапе построения содержательной модели.



Гипотеза

Модели первого типа — гипотезы («такое могло бы быть»), «представляют собой пробное описание явления, причем автор либо верит в его возможность, либо считает даже его истинным». По Пайерлсу это, например, модель Солнечной системы по Птолемею и модель Коперника (усовершенствованная Кеплером), модель атома Резерфорда и модель Большого Взрыва.

Модели-гипотезы в науке не могут быть доказаны раз и навсегда, можно лишь говорить об их опровержении или неопровержении в результате эксперимента.

Если модель первого типа построена, то это означает, что она временно признаётся за истину и можно сконцентрироваться на других проблемах. Однако это не может быть точкой в исследованиях, но только временной паузой: статус модели первого типа может быть только временным.



Клавдий Птолемей (ок. 100 — ок. 170) — позднеэллинистический астроном, астролог, математик, механик, оптик, теоретик музыки и географ.



Феноменологическая модель

Второй тип — феноменологическая модель («ведем себя так, как если бы...»), содержит механизм для описания явления, хотя этот механизм недостаточно убедителен, не может быть достаточно подтвержден имеющимися данными или плохо согласуется с имеющимися теориями и накопленным знанием об объекте. Поэтому феноменологические модели имеют статус временных решений. Считается, что ответ всё ещё неизвестен, и необходимо продолжить поиск «истинных механизмов». Ко второму типу Пайерлс относит, например, модели теплорода и кварковую модель элементарных частиц.

Роль модели в исследовании может меняться со временем, может случиться так, что новые данные и теории подтвердят феноменологические модели и те будут повышены до статуса гипотезы. Аналогично новое знание может постепенно прийти в противоречие с моделями-гипотезами первого типа, и те могут быть переведены во второй. Так, кварковая модель постепенно переходит в разряд гипотез; атомизм в физике возник как временное решение, но с ходом истории перешёл в первый тип. А вот модели эфира проделали путь от типа 1 к типу 2, а сейчас находятся вне науки.



Приближение

Третий тип моделей — приближения («что-то считаем очень большим или очень малым»). Если можно построить уравнения, описывающие исследуемую систему, то это не значит, что их можно решить даже с помощью компьютера. Общепринятый прием в этом случае — использование приближений (моделей типа 3). Среди них *модели линейного отклика*. Уравнения заменяются линейными. Стандартный пример — закон Ома.

Если мы используем модель идеального газа для описания достаточно разреженных газов, то это — модель типа 3 (приближение). При более высоких плотностях газа тоже полезно представлять себе более простую ситуацию с идеальным газом для качественного понимания и оценок, но тогда это уже тип 4.



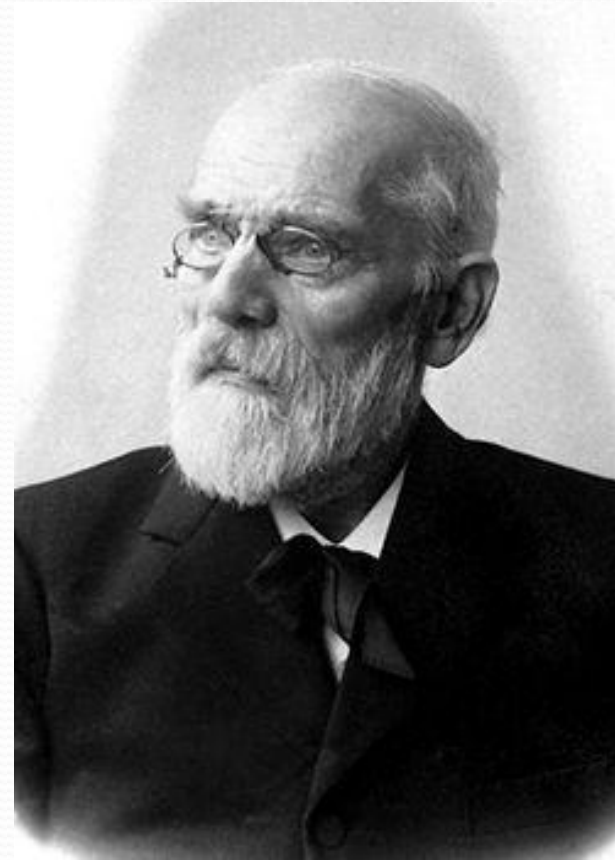
Георг Симон Ом (1789-1854) — знаменитый немецкий физик.



Упрощение

Четвёртый тип — упрощение («опустим для ясности некоторые детали»), в такой отбрасываются детали, которые могут заметно и не всегда контролируемо повлиять на результат. Одни и те же уравнения могут служить моделью типа 3 (приближение) или 4 (опустим для ясности некоторые детали) — это зависит от явления, для изучения которого используется модель. Так, если модели линейного отклика применяются при отсутствии более сложных моделей (то есть не производится линеаризация нелинейных уравнений, а просто ищутся линейные уравнения, описывающие объект), то это уже *феноменологические линейные модели*, и относятся они к следующему типу 4 (все нелинейные детали «для ясности» опускаем).

Примеры: применение модели идеального газа к неидеальному, уравнение состояния Ван-дер-Ваальса, большинство моделей физики твёрдого тела, жидкостей и ядерной физики. Путь от микроописания к свойствам тел (или сред), состоящих из большого числа частиц, очень длинен. Приходится отбрасывать многие детали. Это приводит к моделям четвёртого типа.



Ян Дидерик Ван-дер-Ваальс (1837-1923) - голландский физик, лауреат Нобелевской премии по физике в 1910 г



Эвристическая модель

Пятый тип — эвристическая модель («количественного подтверждения нет, но модель способствует более глубокому проникновению в суть дела»), такая модель сохраняет лишь качественное подобие реальности и даёт предсказания только «по порядку величины». Типичный пример — приближение средней длины свободного пробега в кинетической теории. Оно даёт простые формулы для коэффициентов вязкости, диффузии, теплопроводности, согласующиеся с реальностью по порядку величины.

Но при построении новой физики далеко не сразу получается модель, дающая хотя бы качественное описание объекта — модель пятого типа. В этом случае часто используют модель по аналогии, отражающую действительность хоть в какой-нибудь черте.



Аналогия

Тип шестой — модель-аналогия («учтём только некоторые особенности»). Пайерлс приводит историю использования аналогий в первой статье Гейзенберга о природе ядерных сил.

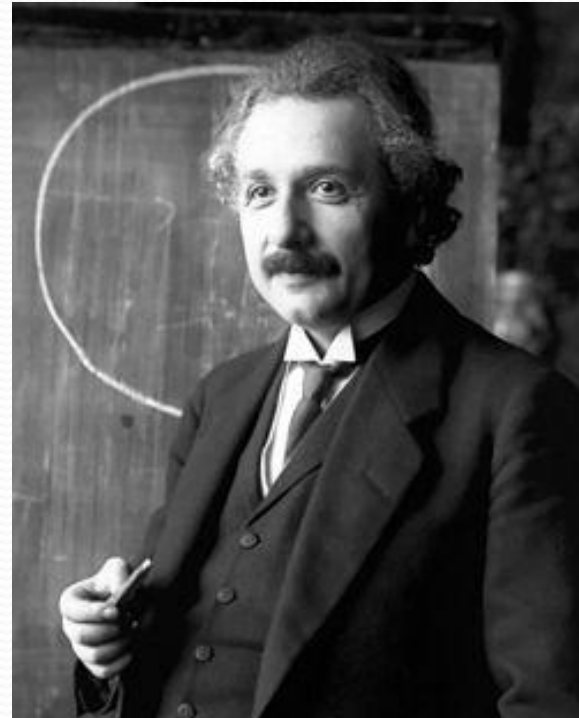


Вернер Карл Гейзенберг (1901-1976) - немецкий физик-теоретик, один из создателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии по физике (1932)



Мысленный эксперимент

Седьмой тип моделей — мысленный эксперимент («главное состоит в опровержении возможности»). Такой тип моделирования часто использовался Эйнштейном, в частности, один из таких экспериментов привёл к построению специальной теории относительности. Предположим, что в классической физике мы движемся за световой волной со скоростью света. Мы будем наблюдать периодически меняющееся в пространстве и постоянное во времени электромагнитное поле. Согласно уравнениям Максвелла, этого быть не может. Отсюда Эйнштейн заключил: либо законы природы меняются при смене системы отсчёта, либо скорость света не зависит от системы отсчёта, и выбрал второй вариант.



Альберт Эйнштейн (1879-1955) — физик-теоретик, один из основателей современной теоретической физики, лауреат Нобелевской премии по физике 1921 года



Демонстрация возможности

Восьмой тип — демонстрация возможности («главное — показать внутреннюю непротиворечивость возможности»), такого рода модели тоже мысленные эксперименты с воображаемыми сущностями, демонстрирующие, что предполагаемое явление согласуется с базовыми принципами и внутренне непротиворечиво. В этом основное отличие от моделей типа 7, которые вскрывают скрытые противоречия.

Один из самых знаменитых таких экспериментов — геометрия Лобачевского. (Лобачевский называл её «воображаемой геометрией».) Другой пример — массовое производство формально—кинетических моделей химических и биологических колебаний, автоволн. Парадокс Эйнштейна — Подольского — Розена был задуман как мысленный эксперимент для демонстрации противоречивости квантовой механики, но незапланированным образом со временем превратился в модель 8 типа — демонстрацию возможности квантовой телепортации информации.



Н. И. Лобачевский

Н. И. Лобачевский (1792-1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии, деятель университетского образования и народного просвещения



Принципы построения математических моделей

- 1. Принцип информационной достаточности.** При полном отсутствии информации об исследуемой системе построение ее модели невозможно. При наличии полной информации о системе ее моделирование лишено смысла. Существует некоторый критический уровень априорных сведений о системе (уровень информационной достаточности), при достижении которого может быть построена ее адекватная модель.
- 2. Принцип осуществимости.** Создаваемая модель должна обеспечивать достижение поставленной цели исследования с вероятностью, существенно отличающейся от нуля, и за конечное время.
- 3. Принцип множественности моделей.** Данный принцип является ключевым. Речь идет о том, что создаваемая модель должна отражать в первую очередь те свойства реальной системы (или явления), которые влияют на выбранный показатель эффективности. Соответственно при использовании любой конкретной модели познаются лишь некоторые стороны реальности. Для более полного ее исследования необходим ряд моделей, позволяющих с разных сторон и с разной степенью детальности отражать рассматриваемый процесс.
- 4. Принцип агрегирования.** В большинстве случаев сложную систему можно представить состоящей из агрегатов (подсистем), для адекватного математического описания которых оказываются пригодными некоторые стандартные математические схемы. Принцип агрегирования позволяет, кроме того, достаточно гибко перестраивать модель в зависимости от задач исследования.
- 5. Принцип параметризации.** В ряде случаев моделируемая система имеет в своем составе некоторые относительно изолированные подсистемы, характеризующиеся определенным параметром, в том числе векторным. Такие подсистемы можно заменять в модели соответствующими числовыми величинами, а не описывать процесс их функционирования. При необходимости зависимость значений этих величин от ситуации может задаваться в виде таблицы, графика или аналитического выражения (формулы). Принцип параметризации позволяет сократить объем и продолжительность моделирования. Однако надо иметь в виду, что параметризация снижает адекватность модели.

Степень реализации перечисленных принципов и каждой конкретной модели может быть различной, причем это зависит не только от желания разработчика, но и от соблюдения им технологии моделирования. А любая технология предполагает наличие определенной последовательности действий



Компьютерные системы моделирования

Для поддержки математического моделирования разработаны системы компьютерной математики, например, Maple, Mathematica, Mathcad, MATLAB, VisSim и др. Они позволяют создавать формальные и блочные модели как простых, так и сложных процессов и устройств и легко менять параметры моделей в ходе моделирования. *Блочные модели* представлены блоками (чаще всего графическими), набор и соединение которых задаются диаграммой модели.

