Транспортная задача линейного программирования

- Имеется **m** поставщиков **($A_1 \ldots A_m$)** некоторого однородного продукта в количествах **$a_1 \ldots a_m$** соответственно.
- Требуется доставить этот продукт **n** потребителям **($B_1 \ldots B_n$)** в количествах **$b_1 \ldots b_n$** соответственно**.**
- Известна **c_{ij}** стоимость перевозки единицы груза от **i**-го поставщика к **j**-му потребителю.
- Составить план перевозок, удовлетворяющий потребности в продукте и имеющий минимальную стоимость.

Исходные данные задачи могут быть представлены также в виде

вектора запасов поставщиков $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \ldots, \boldsymbol{a_m})$,

вектора запросов потребителей $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \ldots, \boldsymbol{b_n})$ и

матрицы стоимостей $\boldsymbol{C} = \{\boldsymbol{c_{ij}}\}$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots c_{mn} \end{pmatrix}$$

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} , ***(i=1,2, ..., m)***, ***(j= 1,2, ..., n)***— объемы перевозок от каждого ***i*** -го поставщика

каждому ***j***-му потребителю.

Эти переменные можно записать в виде матрицы перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\ \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots x_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи

$$F(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \quad \rightarrow \quad \min$$

Все запасы груза должны быть вывезены

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i\,;\, i = 1,2,\dots,m$$

Потребности в грузе должны быть удовлетворены

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\,;\, j = 1,2,\dots n$$

Условие неотрицательности

$$x_{ij} \geq 0, i = 1,2,\dots,m; j = 1,2,\dots,n$$

В рассмотренной модели транспортной задачи предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Такая задача называется задачей с правильным балансом, а ее модель — **закрытой.**

Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с неправильным балансом, а ее модель — **открытой**.

Модель транспортной задачи может быть открытой в двух случаях:

1) Запасы грузов пунктов отправления превышают потребности пунктов назначения

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m > b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Для перехода к закрытой модели вводится (n+1) фиктивный пункт назначения с потреблением:

$$b_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

Стоимость перевозок равна 0.

2) Запасы грузов пунктов отправления меньше потребности пунктов назначения

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

Для перехода к закрытой модели вводится (m+1) фиктивный пункт отправления с запасом груза:

$$a_{m+1} = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$

Стоимость перевозок равна 0.

Если условия задачи представлены в матрице планирования, то клетки, в которых находятся отличные от нуля перевозки называются **занятыми**, а остальные – **незанятыми**.

Занятые клетки соответствуют базисным переменным и для **невырожденного опорного плана их количество должно быть равно m+n-1**.

Поставщики	Потребители					Запасы
	B1	B2	B3	……	Bn	
A1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{13} X_{13}	…… ……	C_{1n} X_{1n}	a_1
A2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{23} X_{23}	…… ……	C_{2n} X_{2n}	a_2
……	……	……	……	……	……	……
Am	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{m3} X_{m3}	…… ……	C_{mn} X_{mn}	a_m
Потребности	b_1	b_2	b_3	……	b_n	$\sum a_i=\sum b_j$

- Существует несколько методов построения первоначального опорного плана.

Метод северо-западного угла

В данном методе запасы очередного поставщика используются для обеспечения запросов очередных потребителей до тех пор, пока не будут исчерпаны полностью, после чего используются запасы следующего по номеру поставщика.

Заполнение таблицы транспортной задачи начинается с левого верхнего угла и состоит из ряда однотипных шагов. На каждом шаге, исходя из запасов очередного поставщика и запросов очередного потребителя, заполняется только одна клетка и соответственно исключается из рассмотрения один поставщик или потребитель. Осуществляется это таким образом:

1) если $a_i < b_j$ то $x_{ij} = a_i$, и исключается поставщик с номером i, $x_{ik} = 0,\ k = 1, 2, ..., n$, $k \neq j$, $b_j' = b_j - a_i$

2) если $a_i > b_j$ то $x_{ij} = b_j$, и исключается потребитель с номером j, $x_{kj} = 0,\ k = 1, 2, ..., m$, $k \neq i$, $a_i' = a_i - b_j$,

3) если $a_i = b_j$ то $x_{ij} = a_i = b_j$, исключается либо поставщик i, $x_{ik} = 0,\ k = 1, 2, ..., n,\ k \neq j$, , $b_j' = 0$, либо j-й потребитель, $x_{kj} = 0,\ k = 1, 2, ..., m,\ k \neq i,\ a_i' = 0$.

Метод минимальной стоимости

Он позволяет построить опорное решение, достаточно близкое к оптимальному, так как использует матрицу стоимостей транспортной задачи $C=\{c_{ij}\}$, $i=1,2, ..., m$, $j=1,2, ..., n$.

Как и метод северо-западного угла, он состоит из ряда однотипных шагов, на каждом из которых заполняется только одна клетка таблицы, соответствующая минимальной стоимости $\min\{c_{ij}\}$, и исключается из рассмотрения только одна строка (поставщик) или один столбец (потребитель). Очередную клетку, соответствующую $\min\{c_{ij}\}$, заполняют по тем же правилам, что и в методе северо-западного угла.

- С помощью рассмотренных методов можно получить вырожденный или невырожденный **опорный** план.
- **Оптимальный** план можно найти с помощью симплекс метода, однако, из-за большого количества переменных обычно используют более простой метод – **метод потенциалов.**

Метод потенциалов

Теорема. Для того, чтобы некоторый допустимый план перевозок был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы ему соответствовала система из $(m + n)$ чисел u_1, u_2, …, u_m и v_1, v_2, …, v_n, удовлетворяющие условиям:

- $v_j + u_i = c_{ij}$ – для **занятых** клеток;
- $v_j + u_i \leq c_{ij}$ – для **свободных** клеток.

- Исходя из первого условия теоремы для занятых клеток находят потенциалы, так как их (m+n), а условий потенциалов (m+n-1), то один из потенциалов принимаем за 0.
- Проверяем второе условие теоремы для свободных клеток. Если оно выполняется для всех клеток, то получаем оптимум.

- Если второе условие теоремы нарушается, то подсчитываем разности ($v_j + u_i - c_{ij}$).
- Выбирают клетку с наибольшим нарушением условия потенциальности.

- Строим цикл для этой клетки. Цикл начинается в этой клетке.

Все вершины находятся в занятых клетках, повороты осуществляются под прямым углом.

Первой свободной клетке присваивается знак «+», следующей занятой клетке знак «-», следующей «+» и так далее знаки чередуются.

- Из клеток со знаком «-» выбираем наименьший груз и обозначаем за число Q.
- План перевозок улучшается на число Q следующим образом. Груз в клетках со знаком «+» увеличивается на число, в клетках со знаком «-» уменьшается на Q.
- Для нового плана повторяем эти пункты.

Пример решения транспортной задачи

В агрохолдинге имеется три картофелехранилища, в которых хранится картофель в следующих количествах: в первом хранилище a_1=100 т, во втором – a_2=130 т и в третьем – a_3 = 170 т. Картофель распределяется между четырьмя торговыми сетями. Первой сети требуется b1 = 150 т картофеля, второй - b2=120 т, b3=80 т и четвертой – b4=50 т.

Стоимость перевозки 1 т картофеля от каждого картофелехранилища к складу каждой торговой сети задано таблицей (в у.е.).

Табличная форма всех условий исходной транспортной задачи

Картофелехранилища	Торговая сеть			
	I	II	III	IV
1	3	5	7	11
2	1	4	6	3
3	5	8	12	7

Составить такой план перевозки картофеля, чтобы общая стоимость всей транспортировки была бы минимальной.

Решение

Найдем общее наличие картофеля –

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100 + 130 + 170 = 400$$

Найдем общие потребности в картофеле –

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 150 + 120 + 80 + 50 = 400$$

Модель транспортной задачи является закрытой.

Построим **опорный план** решения транспортной задачи
Метод северо-западного угла

Табличная форма реализации метода северо-западного угла

Картофелехранилища	Торговая сеть				Наличие картофеля
	I	II	III	IV	
1	3 100	5 -	7 -	11 -	100
2	1 50	4 80	6 -	3 -	130
3	5 -	8 40	12 80	7 50	170
Потребности в картофеле	150	120	80	50	400

Рассчитаем затраты на реализацию данного плана:

$$f(\bar{X}) = 100*3+50*1+80*4+40*8+80*12+50*7=2300$$

Метод минимального элемента

Табличная форма реализации метода минимального элемента

Картофелехранилища	Торговая сеть				Наличие картофеля
	I	II	III	IV	
1	3 20	5 80	7 -	11 -	100
2	1 130	4 -	6 -	3 -	130
3	5 -	8 40	12 80	7 50	170
Потребности в картофеле	150	120	80	50	400

Рассчитаем затраты на реализацию данного плана:

$$f(\bar{X}) = 20 * 3 + 80 * 5 + 130 * 1 + 40 * 8 + 80 * 12 + 50 * 7 = 2220$$

Найдем оптимальный план перевозок **методом потенциалов**

Табличная форма реализации теоремы о потенциалах

Картофелехранилища	Торговая сеть				Наличие картофеля
	v_1	v_2	v_3	v_4	
u_1	3 20	5 80	7 -	11 -	100
u_2	1 130	4 -	6 -	3 -	130
u_3	5 -	8 40	12 80	7 50	170
Потребности в картофеле	150	120	80	50	400