Принятие решений в условиях неопределенности

- Подавляющее большинство социально-экономических решений приходится принимать с учетом противоречивых интересов, относящихся либо к различным лицам или организациям, либо к различным аспектам рассматриваемого явления, либо к тому и другому.

1. Основные понятия теории матричных игр

- **Теория игр, раздел математики, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в условиях конфликта.**
- Под конфликтом понимается явление, в котором участвуют различные стороны, наделённые различными интересами и возможностями выбирать доступные для них действия в соответствии с этими интересами.
- **Целью теории игр является выработка рекомендаций по рациональному образу действий участников в конфликтных ситуациях, то есть определение оптимальной стратегии каждого из них.**

- Отдельные математические вопросы, касающиеся конфликтов, рассматривались начиная с 17 в. многими учёными.
- Систематическая же математическая теория стратегических игр была детально разработана в 30-х годах XX века как средство математического подхода к явлениям конкурентной экономики.
- В ходе своего развития теория игр переросла эти рамки и превратилась в общую математическую теорию конфликтов. Её создателем считается Джон фон Нейман.
- Первой фундаментальной книгой по теории игр была изданная в 1944 году работа "Теория игр и экономическое поведение" (Нейман Д., Моргенштерн О. М.:Наука,1970).

- В условиях конфликта стремление противника скрыть свои предстоящие действия порождает неопределённость. Наоборот, неопределённость при принятии решений (например, на основе недостаточных данных) можно интерпретировать как конфликт принимающего решения субъекта с природой.

- **Игрой** называется всякая конфликтная ситуация, изучаемая в теории игр и представляющая собой упрощенную, схематизированную модель ситуации. От реальной конфликтной ситуации игра отличается тем, что не включает второстепенные, несущественные для ситуации факторы и ведется по определенным правилам, которые в реальной ситуации могут нарушаться.

- Всякая игра включает в себя три элемента: **участников игры** – игроков, **правила игры**, **оценку результатов действий игроков**.
- **Игроком** (лицом, стороной, или коалицией) называется отдельная совокупность интересов, отстаиваемая в игре. Если данную совокупность интересов отстаивает несколько участников игры, то они рассматриваются как один игрок.
- Игроки, имеющие противоположные по отношению друг к другу интересы, называются **противниками**. В игре могут сталкиваться интересы двух или более противников.
- Одна реализация игры называется **партией**; выбор действия (в пределах правил) – **ходом**.
- Ходы бывают **личные** и **случайные**. Личный ход предполагает сознательный выбор того или иного действия, разрешенного правилами игры, а случайный – не зависит от воли игрока (например, он может быть определён подбрасыванием монеты или игральной кости).
- Игры, в которых имеются личные ходы, называются **стратегическими**.
- Игры, состоящие только из случайных ходов, называют **азартными**.

- **Стратегией игрока** называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от сложившейся ситуации.
- В зависимости от числа стратегий игры делятся на **конечные** и **бесконечные**. Игра называется конечной, если у каждого игрока имеется в распоряжении только конечное число стратегий. В противном случае игра называется бесконечной.
- **Оптимальной стратегией игрока** называется такая, которая обеспечивает ему наилучшее положение в данной игре, т.е. максимальный выигрыш. Если игра повторяется неоднократно и содержит, кроме личных, ещё и случайные ходы, оптимальная стратегия обеспечивает максимальный средний выигрыш.
- Игра называется **игрой с нулевой суммой**, если сумма выигрышей всех игроков равна нулю, т.е. каждый игрок выигрывает только за счёт других. Самый простой случай – парная игра с нулевой суммой – называется **антагонистической**.
- **Антагонистической игрой** называется система $G=\langle A,B,H\rangle$, где A,B - непустые множества стратегий соответственно первого и второго игроков; H(a,b) – функция выигрыша игрока A (то есть функция потерь игрока B), $a\in A$, $b\in B$. Таким образом, в процессе игры каждый игрок выбирает свою стратегию, в результате чего образуется ситуация (a, b), которой соответствует выигрыш H(a, b) для первого игрока и – проигрыш H(a, b) для второго.

- Антагонистические игры, в которых каждый игрок имеет конечное множество стратегий, называются **матричными играми**. Для задания такой игры достаточно выписать так называемую платежную матрицу, в которой строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы – стратегиям второго игрока. Элементами матрицы служат выигрыши первого игрока.

	B_1	B_2	. . .	Bm
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1m}
A_2	a_{21}			a_{2m}
. . .				
A_n	a_{n1}			a_{nm}

- Рассмотрим простейшую модель – игру, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц).

- Такую игру (Γ) называют матричной.
- Она определяется тройкой $\Gamma=(X,Y,K)$,

  где

X – множество стратегий 1-го игрока,

Y – множество стратегий 2-го игрока,

$K=K(x,y)$ – функция выигрыша (выигрыш 1-го игрока и соответственно проигрыш 2-го при условии, что 1-й игрок выбрал стратегию , а 2-й – стратегию).

Пару (x,y) называют ситуацией в игре Γ.

- Пусть 1-й игрок имеет всего m стратегий, а 2-й – n стратегий:

$$X=M=\{1,2, \dots, m\}, \quad Y=N=\{1,2, \dots, n\}.$$

- Тогда игра Γ полностью определяется заданием матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$,

где $a_{ij}=K(i,j)$ – выигрыш 1-го игрока при условии, что он выбрал стратегию (т.е. строку) i, а 2-й игрок – стратегию (т.е. столбец) j (эти стратегии называют **чистыми**).

- Матрица A называется матрицей игры или платежной матрицей.

Принцип минимакса (максимина)

- Величина $\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}$ называется нижней ценой игры или максиминным выигрышем (максимином).
- Величина $\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij}$ называется верхней ценой игры или минимаксным выигрышем (минимаксом).

- Пусть $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – платежная матрица игры $Г$.

Если 1-й игрок выбрал стратегию i, то в худшем случае он выиграет $\min\limits_{j} a_{ij}$.

Поэтому он всегда может гарантировать себе выигрыш $\max\limits_{i}\min\limits_{j} a_{ij}$

соответствующая стратегия 1-го игрока называется максиминной.

- Второй игрок, выбрав стратегию j, в худшем случае проиграет $\max\limits_{i} a_{ij}$, а значит, может гарантировать себе проигрыш $\min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij}$,
- соответствующая стратегия 2-го игрока называется минимаксной.

Схема:

$$
A=\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\left.\begin{matrix}
\min\limits_j a_{1j}\\
\min\limits_j a_{2j}\\
\vdots\\
\min\limits_j a_{mj}
\end{matrix}\right\}\Rightarrow \max_i \min_j a_{ij} = \underline{v}
$$

$$
\underbrace{\max_i a_{i1} \quad \max_i a_{i2} \quad \cdots \quad \max_i a_{in}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = \overline{v}}
$$

- Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \underline{v} = -3$$

$$\begin{matrix} 4 & \quad 4 & \quad 6 \end{matrix} \qquad \Rightarrow \bar{v} = 4$$

- Соответствующие стратегии:

i_0=1(максиминная), j_0=1,2 (минимаксная).

- Справедливо неравенство:

$$\underline{v} \leq \overline{v}$$

- Ситуация (i^*, j^*) называется ситуацией равновесия, или седловой точкой, если для любых $i \in M$, $j \in N$, выполняется неравенство

$$a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$$

- Соответствующие стратегии i^*, j^* называются оптимальными чистыми стратегиями 1-го и 2-го игроков, а число $v = a_{i^*j^*}$ называется ценой игры.

- Элемент $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

- Ситуация равновесия существует тогда и только тогда, когда $\underline{v} = v$ (это значение и является ценой игры v).

- Например,

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 20 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ -4 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ 4 \\ -5 \end{matrix} \quad \Rightarrow \bar{v} = \underline{v} = 4.$$

$$\begin{matrix} 5 & 5 & 4 & 20 \end{matrix}$$

- (2,3)-ситуация равновесная, v =4 – цена игры, i^*=2, j^*=3 – оптимальные стратегии 1-го и 2-го игроков. Выбрав их, 1-й игрок обеспечит себе выигрыш не менее 4 ед., а 2-й игрок проиграет не более 4 ед. при любом выборе другого игрока.

- Смешанной стратегией для 1-го игрока называется упорядоченная система m действительных чисел $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, которые можно рассматривать как относительные частоты (вероятности), с которыми 1-й игрок выбирает чистые стратегии $i=1, 2, \ldots, m$.
- Аналогично определяется смешанная стратегия для 2-го игрока: $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$.

- Функция выигрыша $K(x,y)$ в ситуации (x,y) определяется как математическое ожидание выигрыша 1-го игрока при условии, что 1-й и 2-й игроки выбрали соответственно стратегии $x=(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j \quad .$$

- Если для некоторых $x^* \in S_m$ и $y^* \in S_n$ и для всех $x \in S_m$ и $y \in S_n$ выполняется неравенство $K(x, y^*) \le K(x^*, y^*) \le K(x^*, y)$, то x*, y* называются **оптимальными смешанными стратегиями** игроков,

число $v = K(x^*, y^*)$ называется **ценой игры**, пара (x*, y*) – **стратегической седловой точкой**

тройка x*, y*, v – **решением игры**.

- Свойства оптимальных стратегий.

- 1. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A с ценой v.
- Тогда, для того чтобы элемент $x^* \in S_m$ был оптимальной стратегией 1-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента $y \in S_n$ выполнялось неравенство

$$v \le K(x^*, y)$$

- Аналогично, для того чтобы $y^* \in S_n$ был оптимальной стратегией 2-го игрока, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in S_m$ выполнялось неравенство

$$K(x, y^*) \le v$$

- 2. Пусть $K(x,y)$ – математическое ожидание выигрыша в игре Γ_A,
  v – действительное число, $x^* \in S_m$, $y^* \in S_n$.
  Тогда, для того чтобы v было ценой игры, а x^* и y^* были оптимальными стратегиями соответственно 1-го и 2-го игроков, необходимо и достаточно, чтобы для любых $i \in M$ и $j \in N$ выполнялось неравенство

$$K(i, y^*) \le v \le K(x^*, j)$$

- 3. Если x^*, y^* – решение $(m \times n)$-игры Γ_A, то

$$\max_i K(i, y^*) = \min_j K(x^*, j) = v$$

- 4. Пусть $x^* = (x_1, x_2, ..., x_m)$, $y^* = (y_1, y_2, ..., y_n)$, v – решение игры Γ_A.
- Тогда для любого $i \in M$, при котором

  $K(i, y^*) < v$, выполняется неравенство x_i=0, а для любого $j \in N$, при котором $v < K(x^*, j)$, выполняется неравенство y_j=0.

- 5. (**Лемма о масштабе**).
- Если Γ_A – игра с матрицей $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, а $\Gamma_{A'}$ – игра с матрицей $A' = \left(a'_{ij}\right)_{m\times n}$, где $a'_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta$, где α,β=const, α>0, то множества оптимальных стратегий игроков в играх Γ_A и $\Gamma_{A'}$совпадают, а . $v_{A'} = \alpha v_A + \beta$

- Иначе говоря, две игры, отличающиеся лишь началом отсчета выигрышей и масштабом их измерения, стратегически эквивалентны.

2. (2×2) - игры

- Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ – платежная матрица

  игры Г.

  Если она **не имеет седловой точки**, то **единственное** решение игры Г можно найти

- 1) решив две системы:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = v, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$$

- 2) по формулам:

$$x_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad x_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

или $x_2 = 1 - x_1$

$$y_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} \qquad y_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

или $y_2 = 1 - y_1$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

- 3) в матричном виде:

$$x = \frac{JA^*}{JA^*J^T} \qquad y^T = \frac{A^*J^T}{JA^*J^T} \qquad v = \frac{|A|}{JA^*J^T}$$

где $|A|$ – определитель матрицы A,
A^* – присоединенная к A матрица (транспонированная матрица из алгебраических дополнений),
$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}$,
J^T и y^T – транспонированные матрицы J и y.

- Найдем, например, решение игры с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, которая **не имеет седловой точки**.

- 1) Составим системы:

$$\begin{cases} 3y_1 - y_2 = v, \\ 2y_1 + 4y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = v, \\ -x_1 + 4x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

- Решив системы, получим:

$$y_1 = \frac{5}{6} \qquad y_2 = \frac{1}{6} \qquad x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = \frac{2}{3} \qquad v = \frac{7}{3}$$

- то есть $x^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ $\text{y}^* = \left(\frac{5}{6}; \frac{1}{6}\right)$ $v = \frac{7}{3}$ -решение игры.

- 2) Найдем решение по формулам:

$$x_1 = \frac{4-2}{3+4-2+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad x_2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$y_1 = \frac{4+1}{3+4-2+1} = \frac{5}{6} \qquad y_2 = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

$$v = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{3+4-2+1} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- 3) Найдем решение в матричном виде:

$$|A| = 12 + 2 = 14$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$JA^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$JA^*J^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$A^*J^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y^T = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$v = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$