Лекция 2. Отображения и функции.

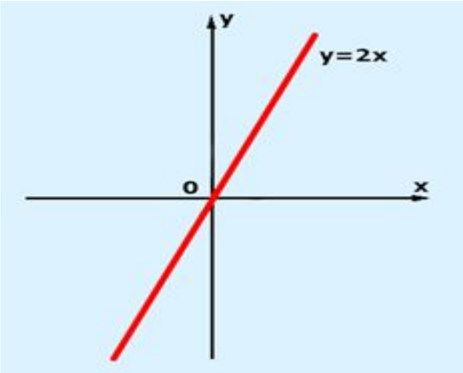
Цель лекции: введение понятия соответствия элементов множеств.

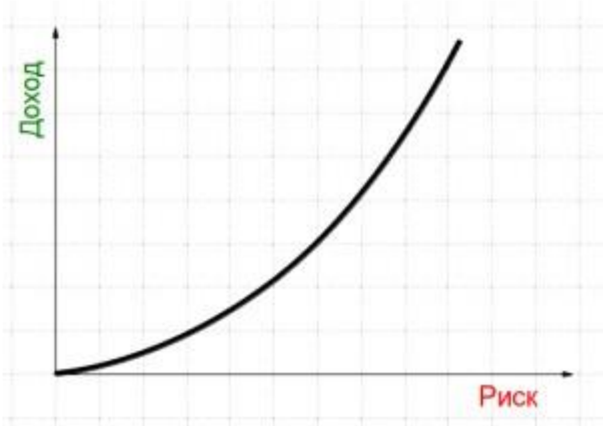
Отображения и функции

- Определение 1: Функция (отображение, оператор, преобразование) – математическое понятие, отражающее однозначную парную связь элементов одного множества с элементами другого множества.
- Определение 2 альтернативное: Функция – это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу одного множества ставится в соответствие элемент другого множества.

Функция

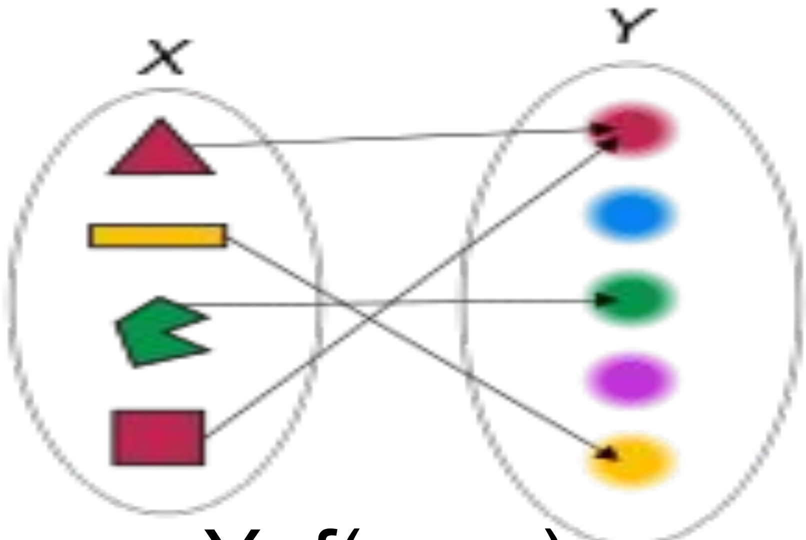
- Математическое понятие функции выражает интуитивное представление о том, как одна величина полностью определяет значение другой величины.
- ПРИМЕР: значение X определяет однозначно выражение y=(2X). Это пример числовой функции.





Функция и отображение

- Пусть даны два множества X и Y.



Обозначение функции

$$y = f(x)$$

Y=f(цвет)

ГОВОРЯТ, что на множестве X имеется функция (отображение) f со значениями из множества Y.
ИЛИ функция f отображает множество X в множество Y.

Термин отображение применяется для всех видов множеств. Термин функция – для числовых множеств.

Известная и неизвестная функция

- Если хотят подчеркнуть, что правило f известно, то говорят, что на множестве X задана функция f, принимающая значения из Y. Y= F (x)
- Если f должна находится в результате решения уравнения, то говорят, что f неизвестная или неявная функция.

  F (x,y)=0

Область задания и область значения функции

- Функция y = f (x) представляет три объекта y,f,x - где
- X – множество, которое называют областью задания функции.
- Y – множество, которое называют областью значений функции.
- F – правило, по которому каждому элементу множества X, сопоставляется элемент множества Y.

Функция

- *Каждый элемент множества X называется независимой переменной или аргументом функции.*
- *Элемент y, соответствующий фиксированному значению x, называется частным значением функции в точке x.*

$$1.\ f : \mathrm{X} \to Y \text{или} \quad \mathrm{x} \xrightarrow{\mathrm{f}} y$$

$$2.\ \mathrm{y} = f(x) \text{или} \quad \mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x})$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ

Равенство двух функций

- Две функции **f** и **g** равны, если совпадают их области задания и если для каждого **x** имеет место равенство: **f (x) = g (x)**
- **ПРИМЕР:** Пусть x – элемент числового множества. ВОПРОС – Равны ли функции F и G если:

$$f(x) = x + 1, \text{а } \mathrm{g(x)} = -x^3 + 2x + 1$$

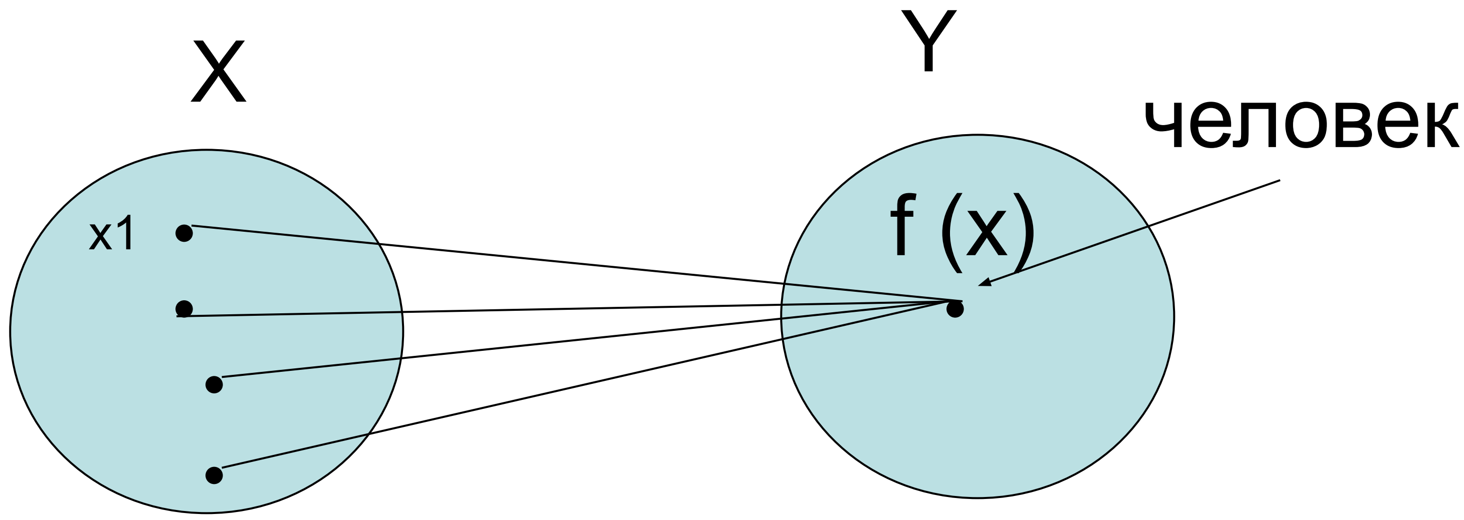
На этот вопрос нельзя ответить, так как не указаны области определения функций. Если область определения все действительные числа, то функции не равны. (Пусть x=2.)
И пусть x={-1,0,+1} ?????

Частные виды отображений

- Константа или постоянная.
- Взаимно однозначная.
- Функция нескольких аргументов.
- Числовая функция.
- Сужение функции.
- Суперпозиция или сложная функция.

Постоянная функция

- Если область значений f состоит из одного элемента, то функцию f или отображение f называют постоянной.

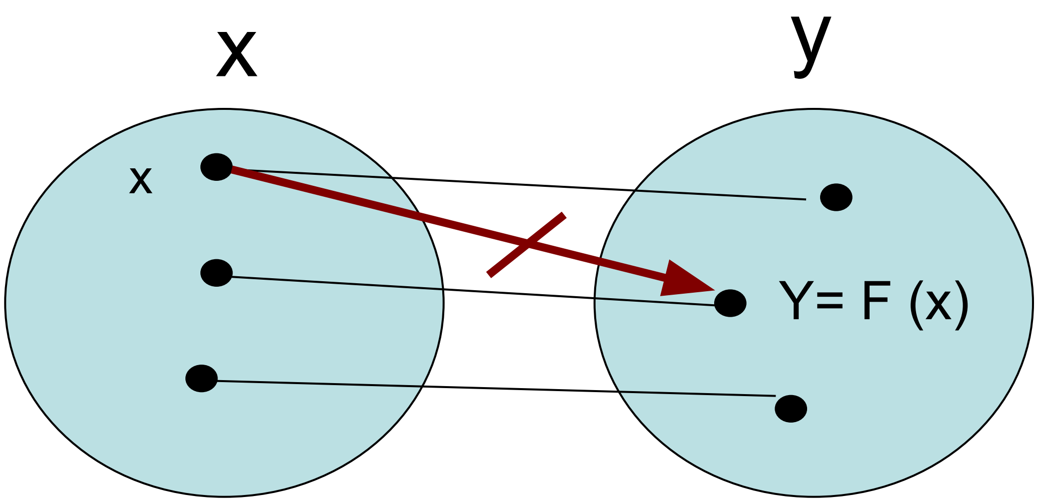


национальность

Y=7

Взаимно однозначная функция

- Если разным элементам множества Х соответствуют разные элементы множества У, то отображение называют взаимно-однозначным.



Иногда пользуются понятием обратного отображения или функции f^{-1}

Функции нескольких аргументов

- Если множество X представляет собой декартово произведение множеств x1, x2….xn, тогда отображение

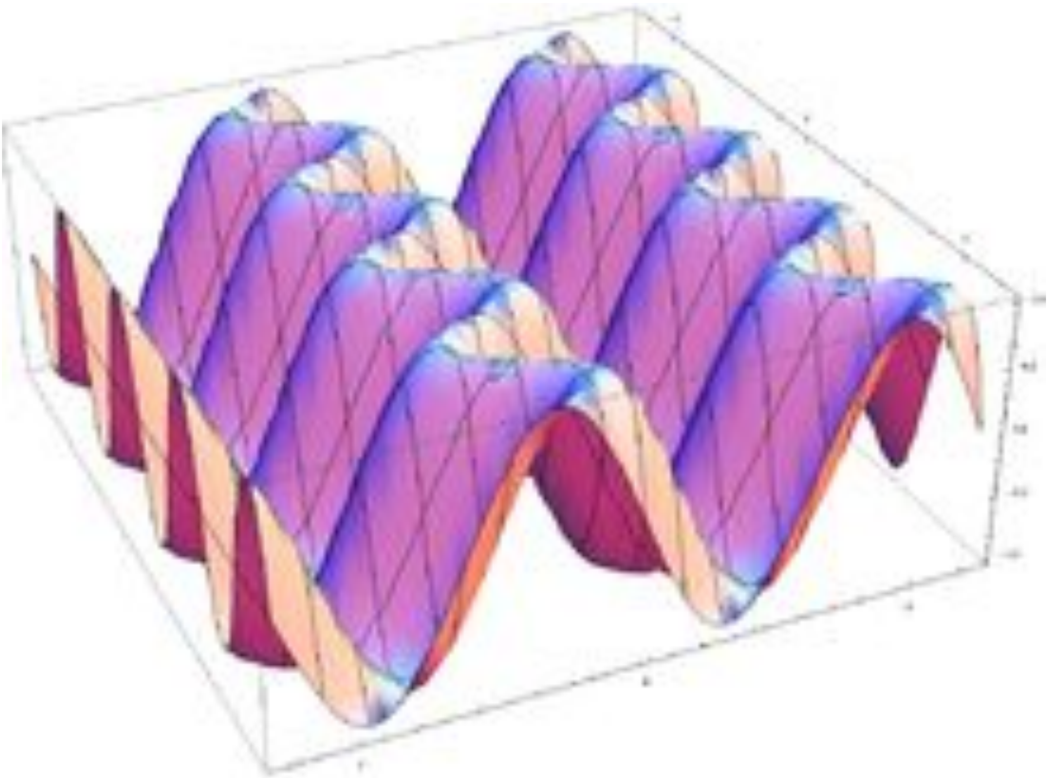
$$f = \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$$

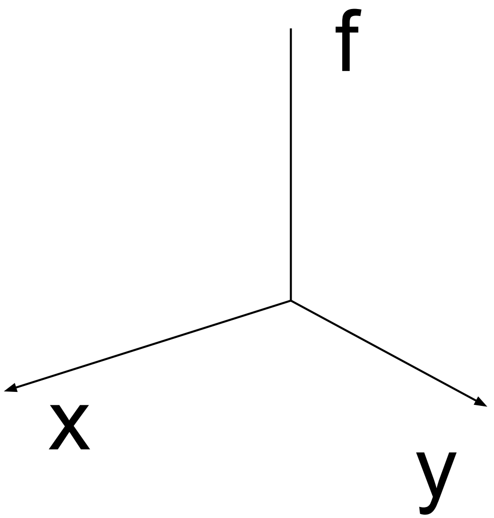
где Y – множество вещественных чисел называют n – местным отображением, при этом элементы упорядоченного набора x=(x1,x2,…,xn) называют аргументами N-местной функции, каждый из которых пробегает свое множество:

$$x_i \in X_i \text{ где } \mathrm{i} = 1, \mathrm{n}$$

Y=F(x1,x2,…xn)

Пример функции двух аргументов и ее графической модели





$$f(x,y) = \sin(x - \sin(2y))$$

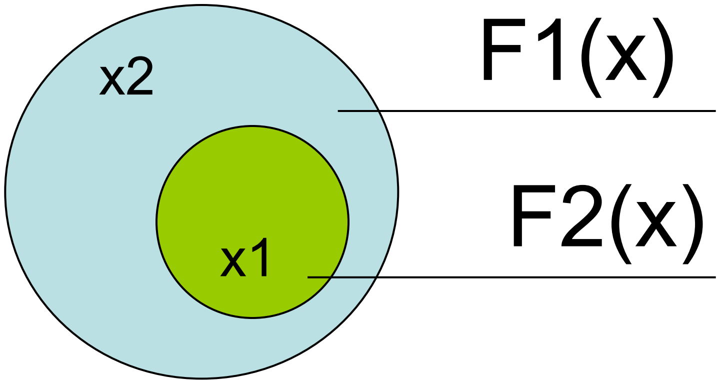
Числовая функция

- Функция, областью значений которой являются числовое множество, называют числовой.
- Термин «функция» употребляют именно для числовых функций, а термин «отображение» для всех других.
- Особенностью числовых функций состоит в том, что в области их значений имеются математические операции. Это влечет за собой возможность вводить аналогичные операции для числовых функций.
- $$h(x) = f(x) + g(x)$$

Понятие сужения функции

- Пусть имеются две функции **f1** и **f2** с областями определения в виде множеств **X1** и **X2**. Пусть $X_1 \subset X_2$ и для всех $x \in X_1$ выполняется $f_1(x) = f_2(x)$

Тогда **f1** называется сужением функции **f2**



Суперпозиция или сложная функция

- Пусть f – функция, определенная на множестве D, со значениями в множестве E, а F – функция определенная на $A \subset E$, со значениями в множестве H.
- Тогда функция G, определенная на B включенным в D, таком что

$f(B) = A \subset f(D)$, со значениями в H

действующая по формуле

$G(x) = F[f(x)], x \in B$

Называется сложной функцией или суперпозицией

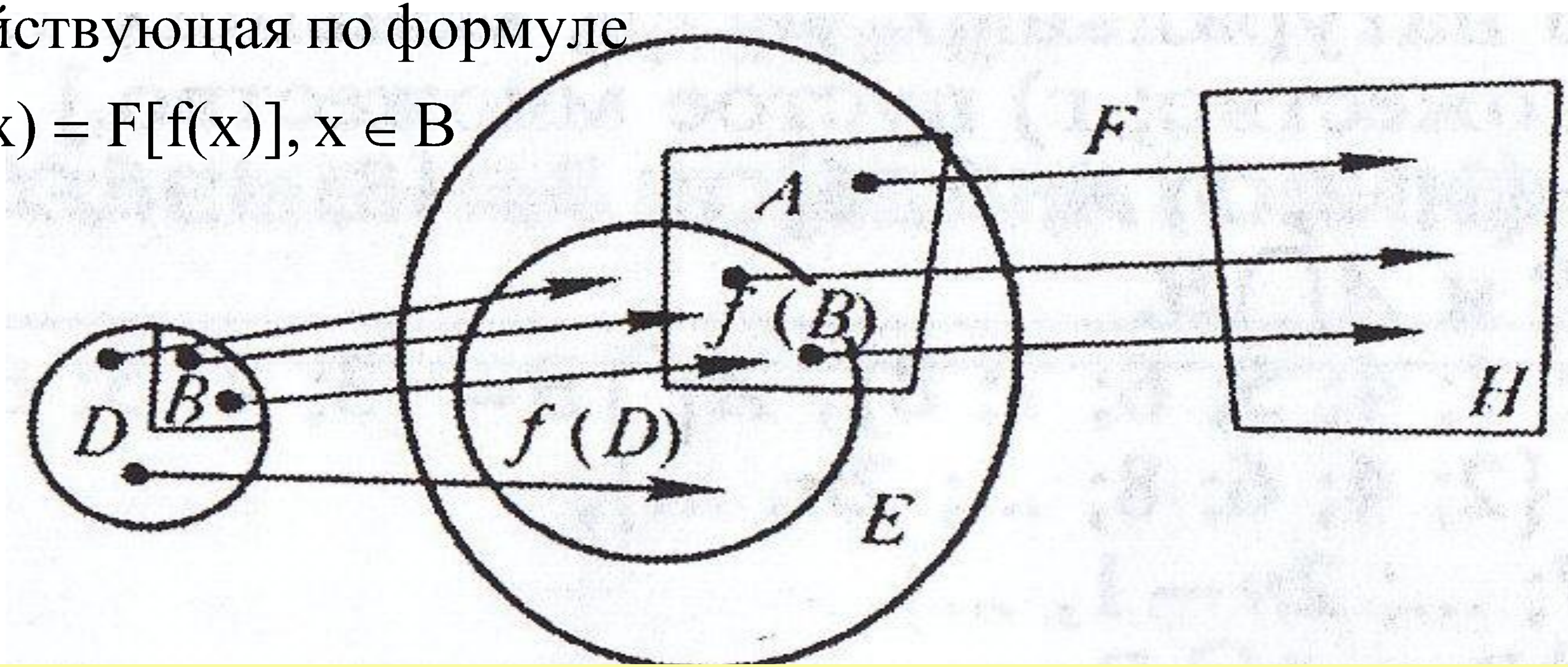
Графическая интерпретация сложной функции или суперпозиции

- Тогда функция G, определенная на B включенным
- в D, таком что

$f(B) = A \subset f(D)$, со значениями в H

действующая по формуле

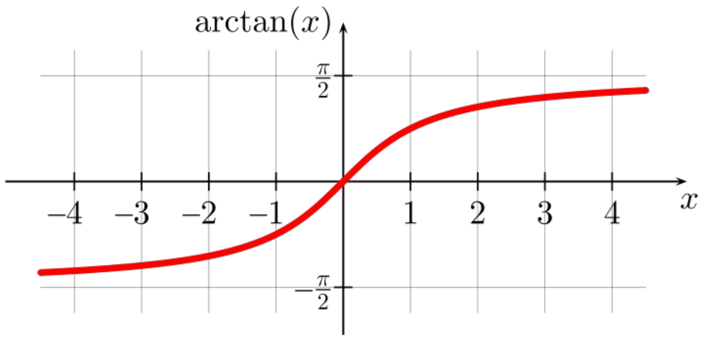
$G(x) = F[f(x)],\ x \in B$



G - функция, аргументом которой является функции

Способы задания числовой функции

- Аналитический. С помощью формулы и стандартных обозначений
- Графический.



- Табличный.

С помощью таблицы значений

- Рекурсивный.

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1)!, & n > 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

- Словесный. Игрек равно целая часть от икс.

Реку́рсия — определение, описание, изображение какого-либо объекта или процесса внутри самого этого объекта или процесса, то есть ситуация, когда объект является частью самого себя

Пример рекурсивного изображения

В программировании рекурсией называют вызов подпрограммы

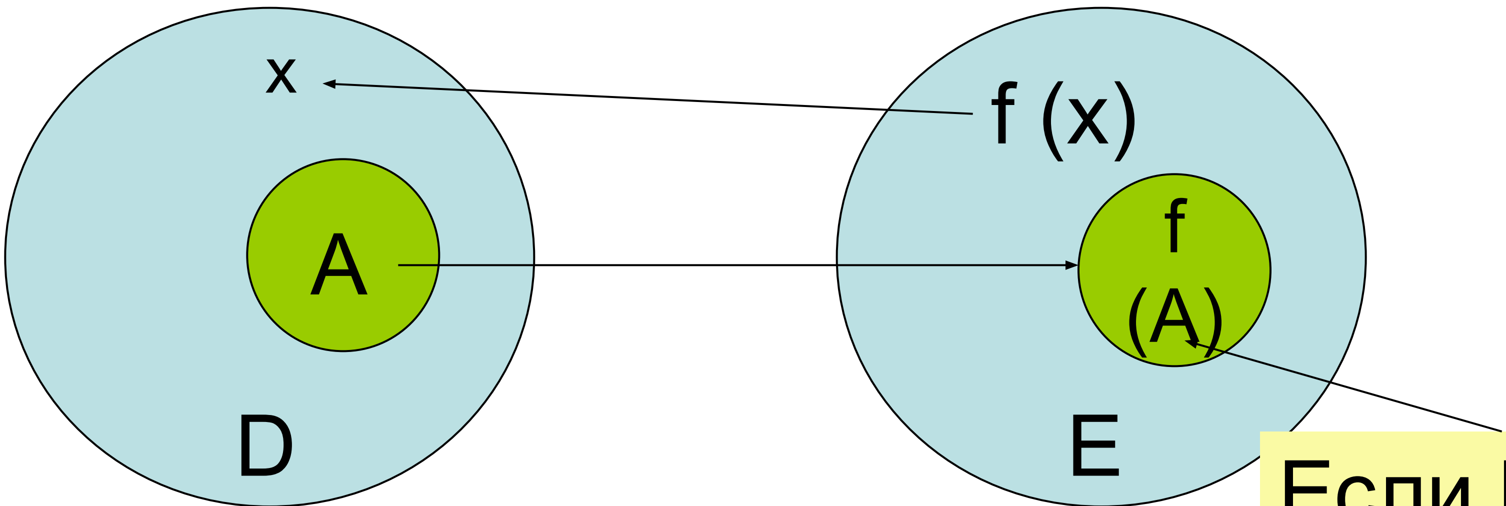
Понятие образа при отображении

- Элемент **y = f (x)**, который сопоставлен элементу x, называется образом элемента x (при отображении f).
- Если выделить подмножество **A** в области задания функции f, то можно рассмотреть совокупность образов всех элементов множества A, а именно подмножество области значений вида:

$$f(A) = \{f(x) : \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$$

Называют образом множества A

Графическое представление образа множества



Если B, то

образ $f(A) = \{f(x) : \mathrm{x} \in \mathrm{A}\}$

$$f^{-1}(B) = \{x : \mathrm{f(x)} \in \mathrm{B}\}$$

Это множество называют прообразом множества B

Обратное отображение

- Если отображение f:X– Y является взаимно однозначным, то существует отображение, у которого:
- Область задания (множество Y) совпадает с областью отображения f.
- Область значений (множество X) совпадает с областью задания отображения f.

$$x = f^{-1}(y) \text{ когда } y = f(x)$$

Отображение f^{-1} называют обратным по отношению к отображению f.

Свойства образов

- Пусть А и В подмножества области задания функции f: X---Y, тогда образы множеств А и В, при отображении f, обладают следующими свойствами:

$$f(\varnothing) = \varnothing$$

$$A \neq \varnothing \rightarrow f(A) \neq \varnothing$$

$$A \subset B \rightarrow f(A) \subset f(B)$$

образ объединения множеств равен объединению образов

$$\mathrm{f}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mathrm{f}(\mathrm{A}) \cup f(B)$$

Образ пересечения множеств яявляетс подмножеством пересечения образов

$$\mathrm{f}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \subset f(A) \cap f(B)$$

Свойства 4 и 5 допускают обобщение на любое количество множеств

Поведение функций

- Сюръективность.
- Инъективность.
- Биективность.
- Возрастание и убывание:
- неубывающая функция;
- невозрастающая функция;
- возрастающая функция;
- убывающая функция.
- Переодическая.
- Четная.
- Экстремум функции.

монотонная

строго монотонная

Поведение функций

- **Сюръекция** (*сюръективное отображение*, от фр. *sur* — «*на*») — отображение») — отображение множества») — отображение множества X на множество $(f: X \to Y)$, при котором каждый элемент множества») — отображение множества X на множество , при котором каждый элемент множества Y является образом хотя бы одного элемента множества X , то есть

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : y = f(x)$$

любой

существует

Сюръективность функции

- **ПРИМЕР**

Отображение f сюръективно,
для любого x, принадлежащего R+

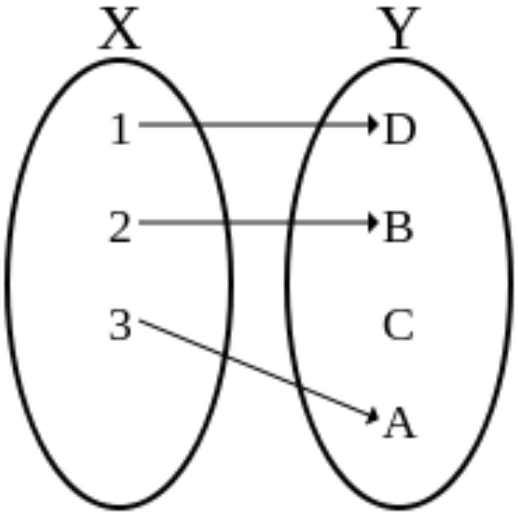
$$f : R \to R+, f(x) = x^2$$

$$f : R \to R, f(x) = x^2$$

Отображение f не сюръективно,
Так как не существует x, принадлежащего R
чтобы f (x) = -9

Поведение функций

- Инъективность – означает такое отображение f множества X в множество Y, при котором разные элементы множества X соответствуют разным элементам множества Y.



Инъективность

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = \ln x$$

$$f : \mathbb{R}_{+} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$$

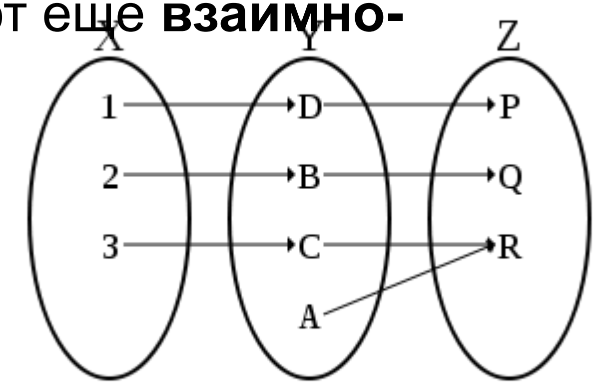
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ f(x) = x^2$$

Не инъективная функция так как:

$$f(-2) = f(2) = 4$$

Поведение функций

- **Биекция** — это отображение — это отображение, которое является одновременно и сюръективным — это отображение, которое является одновременно и сюръективным, и инъективным. При биективном отображении каждому элементу одного множества соответствует ровно один элемент другого множества, при этом определено обратное отображение, которое обладает тем же свойством. Поэтому биективное отображение называют ещё **взаимно-однозначным отображением**

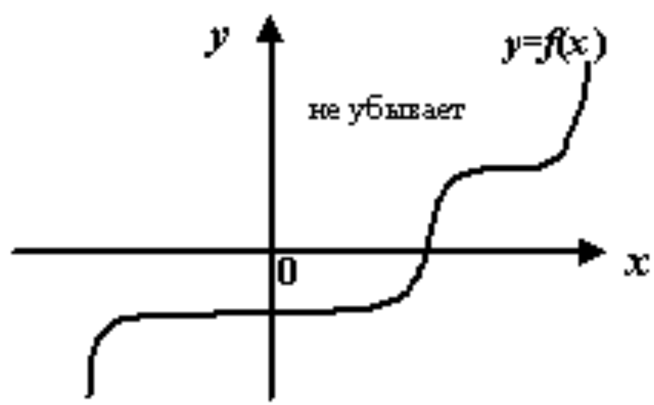


Композиция инъекции и сюръекции порождающие биекцию

Неубывающая функция

- Пусть дана функция $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$
  функция называется **неубывающей на M** , если

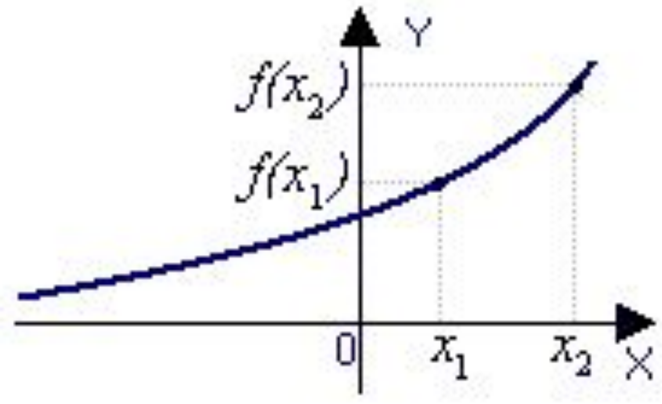
$$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$



Возрастающая функция

- Пусть дана функция $f\colon M\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$
- функция называется **возраста́ющей** н а М, если

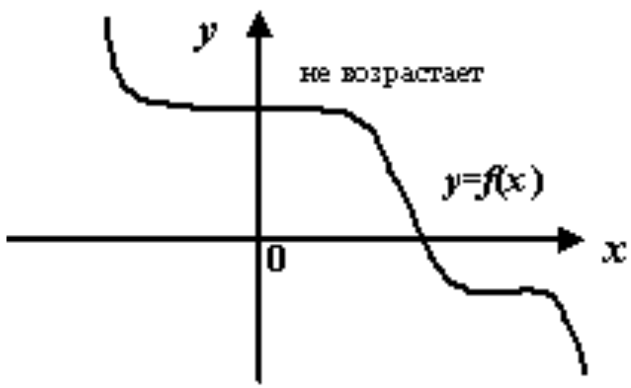
$$\forall x,y\in M,\ x>y\Rightarrow f(x)>f(y);$$



Невозрастающая функция

- Пусть дана функция $f\colon M \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$
- функция называется **невозраста́ющей** на М , если

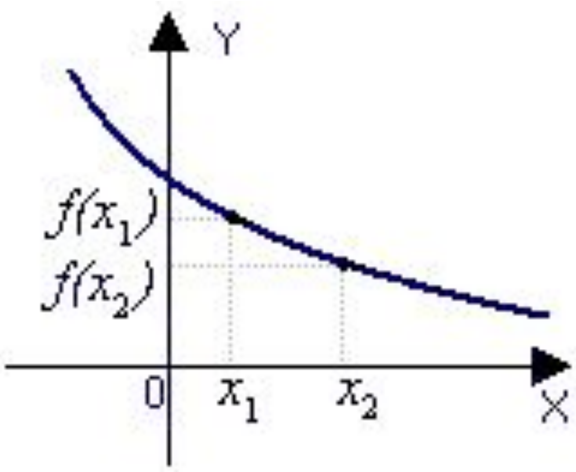
$$\forall x, y \in M,\ x > y \Rightarrow f(x) \le f(y);$$



Убывающая функция

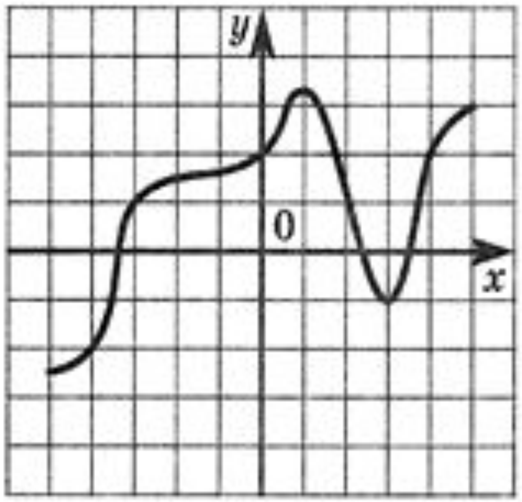
- Пусть дана функция $f\colon M\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}.$
- функция называется **убыва́ющей** на M , если

$$\forall x, y\in M,\ x>y\Rightarrow f(x)<f(y).$$

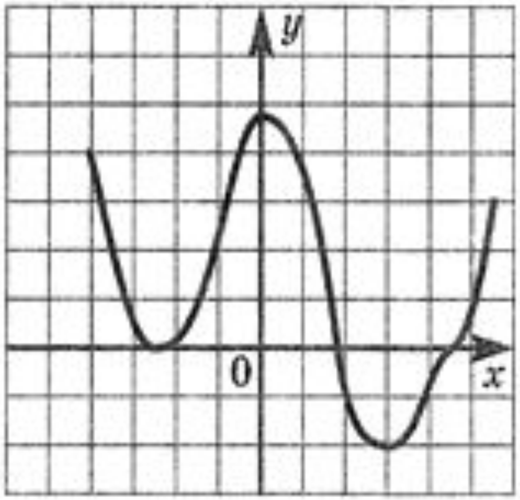


Какой график представляет убывающую функцию

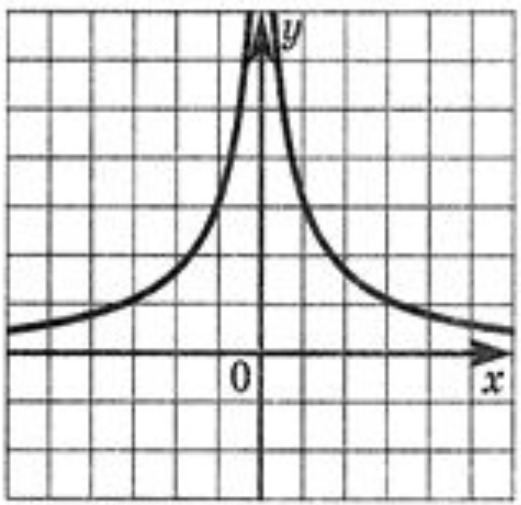
1)



2)



3)



4)