Повторяем тему «Производная»

(По материалам, изученным в 10 классе).

Таблица производных

$$C' = 0$$

$$x' = 1$$

$$(kx + b)' = k$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(\mathrm{x}^{\mathrm{n}})' = n \cdot x^{n-1}$$

Таблица производных

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Правила дифференцирования

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

Найти производную функции

$$1)\, f(x) = 3x^7 + 5x^5 - 2x^3 + 4x - 6$$

Решение

$$f'(x) = 3\cdot(x^7)' + 5\cdot(x^5)' - 2\cdot(x^3)' + 4\cdot(x)' - 6'$$

$$f'(x) = 3\cdot 7x^6 + 5\cdot 5x^4 + 2\cdot 3x^2 + 4\cdot 1 - 0$$

$$f'(x) = 21x^6 + 25x^4 - 6x^2 + 4$$

Найти производную функции

$$2)\, f(x) = (5\sin x - x^6)$$

Решение

$$f'(x) = (5\sin x - x^6)' =$$

$$= 5(\sin x)' - (x^6)' =$$

$$= 5\cos x - 6x^5$$

Найти производную функции

$$3)\, f(x) = 12x - tg(x)$$

Решение

$$f'(x) = 12 \cdot (x') - (tg(x))'$$

$$f'(x) = 12 \cdot 1 - \frac{1}{cos^2 x} \qquad f'(x) = 12 - \frac{1}{cos^2 x}$$

Найти производную функции

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x$$

Решение

$$f'(x) = (x^4)' \cdot sinx + x^4 \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

Найти производную функции

$$5)\ f(x)=\frac{2x}{4x+3}$$

Решение

$$f'(x)=\frac{(2x)'\cdot(4x+3)-2x\cdot(4x+3)'}{(4x+3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(4x+3)-2x\cdot 4}{(4x+3)^2}=\frac{8x+6-8x}{(4x+3)^2}=\frac{6}{(4x+3)^2}$$

Производная сложной функции

$$f(g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$$

Пример

$$f(x) = (-5x + 11)^4$$

Решение

$$f'(x) = ((-5x + 11)^4)' \cdot (5x + 11)'$$

$$f(x)' = 4 \cdot (-5x + 11)^3 \cdot (-5) = -20 \cdot (-5x + 11)^3$$

Производная сложной функции

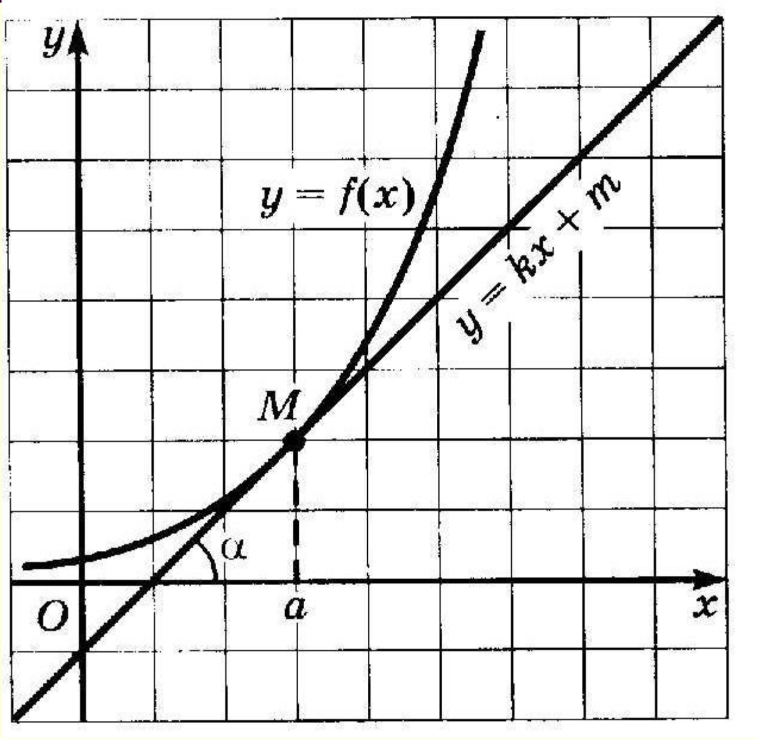
$$f(x) = \cos 5x$$

Решение

$$f'(x) = (cos5x)' \cdot (5x)' = -sin5x \cdot 5$$

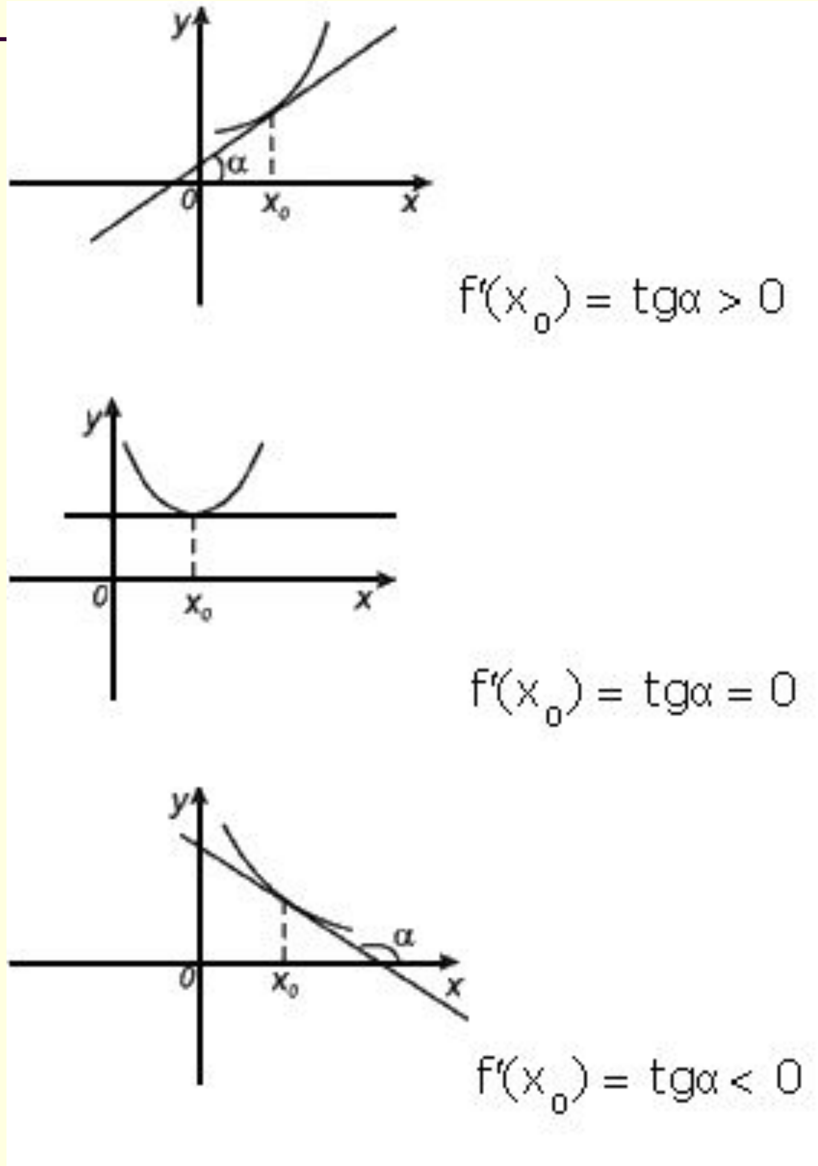
$$f'(x) = -5sin5x$$

Геометрический смысл производной



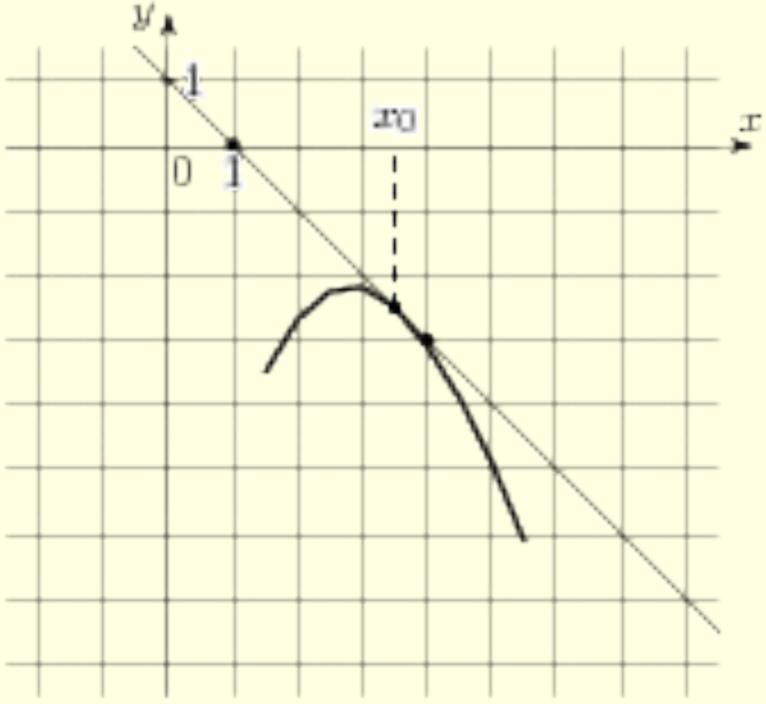
$$k = f'(a) = \mathrm{tg}\,\alpha$$

Какой угол образует производная?



Производная на ЕГЭ (задача В8)

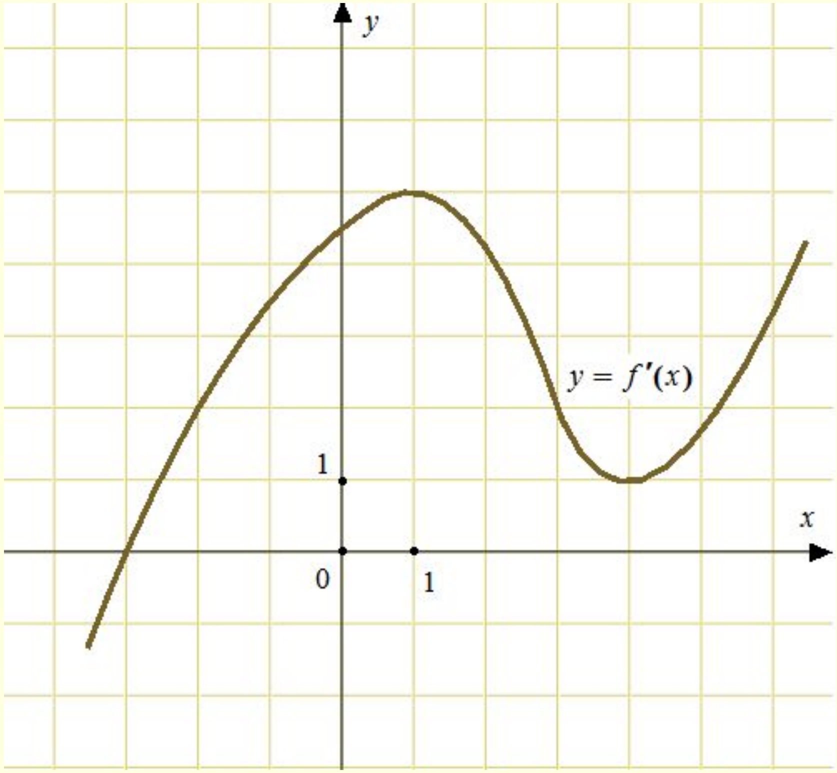
- На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 Найдите значение производной функции y = f(x) в точке x_0



Ответ: $tg\alpha = -1$

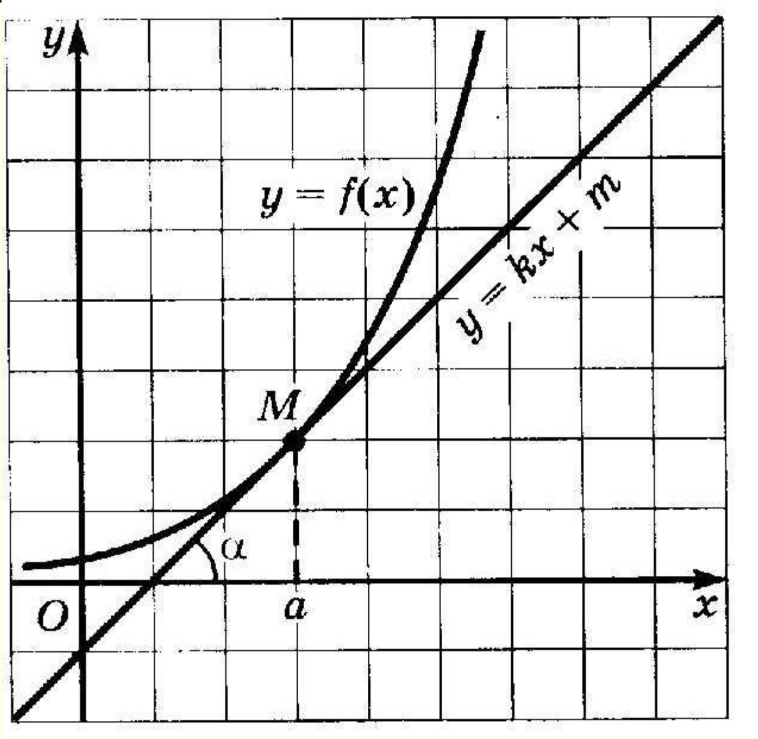
Производная на ЕГЭ (задача В8)

На рисунке изображен график производной функции f(x). Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику y=f(x) параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Ответ: x = - 3

Уравнение касательной



$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

Пример *Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции* $y = 2x^3 - 5x^2 - 2$ *точке графика с абсциссой* $x_0 = 2.$

Решение

$$y = f(x_0) + f'(x_0) * (x - x_0)$$

$$y'(x) = 2*(x^3)' - 5*(x^2)' - 2' = 2*3x^2 - 5*2x - 0 =$$
$$= 6x^2 - 10x$$

$$y(x_0) = y(2) = 2*2^3 - 5*2^2 - 2 = -6$$

$$y'(x_0) = y'(2) = 6*2^2 - 10*2 = 4$$

$$y = -6 + 4*(x - 2) = -6 + 4x - 8 = 4x - 14$$

Ответ: $y = 4x - 14$

Физический (механический) смысл производной

$$S'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

Пример

Материальная точка движется по прямой так, что ее скорость в момент времени t равна

$$v(t) = t^3 - 2t.$$

Найдите ускорение точки в момент времени t = 3.

Решение

$$a(t) = v'(t)$$

$$v'(t) = (t^3 - 2t)' = 3 * t^2 - 2$$

$$v'(3) = 3 * 3^2 - 2 = 25$$

Ответ: $a(3) = 25$

Найдите наибольшее значение функции

$y = x^3 - 3x + 4$ на отрезке $[-2;0]$

$1)\ y'(x) = 3x^2 - 3$

$2)\ y'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0$

$3(x^2 - 1) = 0$

$x = 1 \notin [-2;0]$

$x = -1$

$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 4 =$
$-8 + 6 + 4 = 2$

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 =$
$= -1 + 3 + 4 = 6$

$y(0) = 4$

Ответ: 6

Найдите точку максимума (минимума) функции

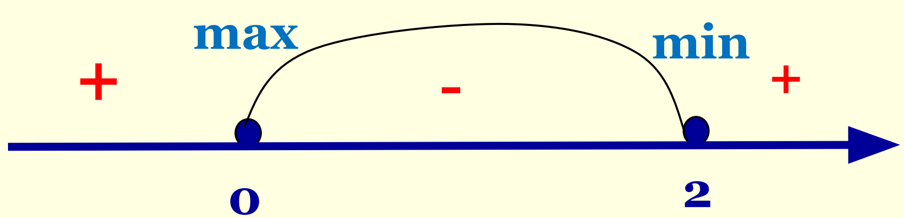
$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

$$1)\, y'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$2)\, 3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = 2$$



Постройте график функции , используя подробную схему построения. схему построения.

$$y = x + \frac{1}{x-1} - 3$$

1) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

2) Функция не является ни четной, ни нечетной, т. к. $f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

3) x = 1 – вертикальная асимптота

4) $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ f’(x) = 0 при x = 2, x = 0.

x = 2, x = 0 – стационарные точки.

5) f'(x)>0 при $x \in (-\infty;\ 0), x \in (2;\ +\infty)$ Так как в точках x = 0, x = 2 функция непрерывна, то эти точки также включаются в промежутки возрастания.

f'(x(<0 при x(0,1);x(1;2) . Так как в точках x = 0, x = 2 функция непрерывна,
то эти точки также включаются в промежутки убывания.

Так как в точке x = 0 производная меняет знак с «+» на «-»,
то x = 0 – точка максимума.

Так как в точке x = 2 производная меняет знак с «-» на «+»,
то x = 2 – точка минимума. ↗↘↘↗

x = 1 – не является точкой экстремума

6) Найдем интервалы выпуклости функции.

и. f ''(x)=2(x-1)^3

; f ''(x) <0 при x <1 при x(-∞;1) функция выпукла вверх.

; f ''(x) >0 при x) >1 при x(1;+∞) функция выпукла вниз.

7) Результаты исследования представим в виде таблицы.

↗↘↘↗

x	(-∞; 0)	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2	(2; +∞)
f'(x)	+	0	-	Не сущ.	-	0	+
f''(x)	-		-	Не сущ.	+		+
f(x)		-4		Не сущ.		0	
		max				min	

8) Координаты некоторых точек:

x	-1	0,5	1,5	3
f(x)	-4,5	-4,5	0,5	0,5

7) По полученным данным строим график функции.