

Розділ 3

МАГНІТНЕ ПОЛЕ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

Зміст

3.1

*Основні характеристики магнітного поля постійного струму.
Закон Біо – Савара*

3.2

Закон повного струму

3.3

Розв'язування прямої задачі магнітного поля постійного струму в загальній формі

3.4

Граничні умови магнітного поля постійного струму

3.5

Поняття індуктивності. Енергія магнітного поля постійного струму

3.6

Висновки

3.7

Контрольні питання та завдання

3.1 Магнітне поле постійного струму

Будь-який рухомий електричний заряд створює в навколишньому середовищі магнітне поле. Воно неперервне в просторі і впливає на інші рухомі електричні заряди.

Введемо поняття магнітних зарядів. На відміну від електричних зарядів, магнітних зарядів одного знаку в природі не існує, бо скільки б не зменшували розміри магніту, він завжди матиме два полюси (рис.3.1а). Тому для спрощення досліджень застосовують модель магніту у вигляді довгої, нескінченно тонкої магнітної «спиці» (рис.3.1б), в наслідок чого фіктивні магнітні заряди протилежних знаків зосереджуються на її кінцях.

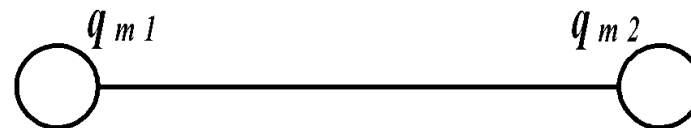


Рисунок 3.1 Модель : а- магніту ; б- магнітної «спиці»

Для такої моделі магніту можна за аналогією скористатись законами та положеннями електростатики. Аналогія закону Кулона для магнітної спиці:

$$\vec{F}_m = \frac{q_{m1}q_{m2}}{4\pi\mu r^2} \vec{1}_r$$

Вектор напруженості електричного поля визначають як: $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \vec{1}_r$

за аналогією запишемо вектор напруженості магнітного поля:

$$\frac{\vec{F}_m}{q_m} = \vec{H} = \frac{q_m}{4\pi\mu r^2} \vec{1}_r \quad \text{Одиниця виміру} \quad H = \left[\frac{A}{m} \right]$$

В електростатиці вектор електричного зміщення (вектор електричної індукції) $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ введено для того, щоб охарактеризувати електричне поле незалежно від середовища, в якому це поле існує, за аналогією з електростатикою введемо поняття вектора магнітної індукції :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \frac{q_m}{4\pi r^2} \vec{1}_r$$

За фізичною сутністю вектор \vec{B} – це *густина магнітного потоку*.
Визначимо одиницю вимірювання вектора магнітної індукції.

$$\left[\vec{B} \right] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \right] = \left[\frac{\text{Вб}}{\text{м}^2} \right] = [\text{Тл}], \quad 1\text{Тл} = 10^4\text{Гс}.$$

Деякі об'єкти, які розташовано в магнітному полі, мають здатність до намагнічування. Це явище характеризує вектор *намагніченості*.

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H};$$

За Національним стандартом України ДСТУ 2843 **намагніченість** – це векторна величина, якою характеризують магнітний стан речовини, яку визначають як границю відношення магнітного моменту елементів об'єму речовини до цього елемента об'єму, коли останній прямує до нуля.

Для магнітних речовин вектор магнітної індукції визначають:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 \chi_{mr} \vec{H} + \mu_0 \vec{H} = \mu_0 (\chi_{mr} + 1) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

Магнітна сприйнятливість - це величина, яка характеризує властивість речовини намагнічуватись у магнітному полі і яку визначають, як відношення модуля намагніченості до модуля напруженості магнітного поля, вона скалярна для ізотропної речовини.

Магнітна проникність μ - величина, що показує, у скільки індукція \vec{B} магнітного поля в однорідному середовищі відрізняється від індукції B_0 магнітного поля в вакуумі.

Для діамагнетиків, тобто речовин, що послаблюють магнітну індукцію зовнішнього поля, $\mu_r < 1$ ($\chi_{MF} < 0$). Для парамагнетиків, що підсилюють магнітну індукцію зовнішнього поля $\mu_r < 1$ ($\chi_{MF} > 0$). Для феромагнетиків, що мають власну намагніченість і внутрішнє магнітне поле у багато разів перевищує зовнішнє поле, $\mu_r \gg 1$.

Закон Біо – Савара

Для монохромного поля та неоднорідного лінійного ізотропного середовища магнітна проникність у загальному випадку є функцією узагальнених криволінійних координат. ξ, η, ζ .

$$\vec{B} = \mu(\xi, \eta, \zeta) \vec{H}.$$

Якщо середовище нелінійне, тобто $\mu = \mu(H)$, маємо:

$$\vec{B} = \mu(H) \vec{H}.$$

Для монохромного поля, однорідного лінійного анізотропного середовища:

$$(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{pmatrix}$$

де сукупність чисел
проникності:

має назву *тензор* (μ) *абсолютної магнітної*

$$\left. \begin{aligned} B_{\xi} &= \mu_{11}H_{\xi} + \mu_{12}H_{\eta} + \mu_{13}H_{\zeta} \\ B_{\eta} &= \mu_{21}H_{\xi} + \mu_{22}H_{\eta} + \mu_{23}H_{\zeta} \\ B_{\zeta} &= \mu_{31}H_{\xi} + \mu_{32}H_{\eta} + \mu_{33}H_{\zeta} \end{aligned} \right\}$$

Розглянемо питання про визначення магнітного поля, що створюється постійним електричним струмом. В основі розв'язання прямої задачі магнітостатики покладемо закон Біо – Савара, відкритий експериментально у 1820 р.:

$$d\vec{H} = \frac{I d\vec{l}}{4\pi r^2} \times \vec{r} \quad \text{Закон Біо-Савара в диф. формі}$$

де $I d\vec{l}$ - елемент струму, що є вектором і визначає модуль і напрям елемента $d\vec{H}$

Закон Біо-Савара свідчить про те, що напруженість магнітного поля, яке створюється елементом постійного струму $I d\vec{l}$, прямо пропорційна значенню цього елемента, обернено пропорційна квадрату відстані до точки спостереження і залежить від напрямку на неї (рис.3.2).

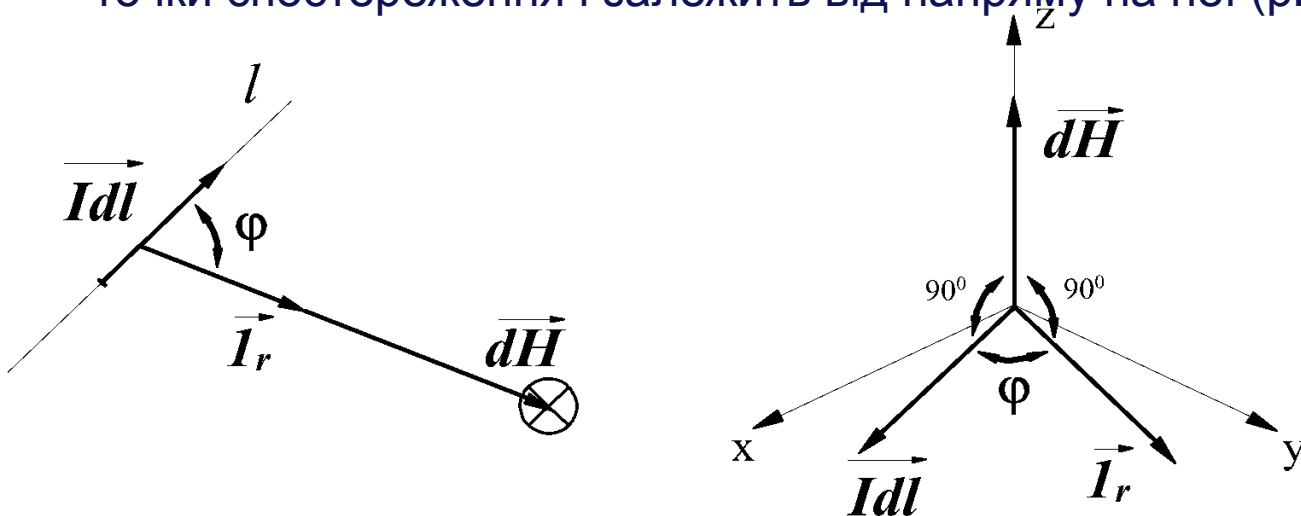


Рисунок 3.2 До визначення напрямку вектора \vec{H}
а- на площині; б- умовно в просторі

Визначимо модуль $d\vec{H}$:

$$|d\vec{H}| = \frac{|\vec{I}d\vec{l}||\vec{1}_r| \sin(\widehat{d\vec{l} \vec{1}_r})}{4\pi r^2},$$

де $\sin(\widehat{d\vec{l} \vec{1}_r}) = \sin(\varphi)$, φ – кут між напрямком $d\vec{l}$ та одиничним вектором $\vec{1}_r$.

Загальне поле за принципом суперпозиції визначають за результатом інтегрування за всіма елементами струму. Тоді рівняння для напруженості магнітного поля набуде вигляду:

$$|\vec{H}| = \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \varphi}{r^2} dl.$$

Приклад застосування закону Біо – Савара

Розглянемо приклад застосування закону Біо-Савара для нескінченно довгого тонкого провідника l зі струмом I . На відстані R від провідника знаходиться точка спостереження A , через яку проходять силові лінії магнітного поля (рис 3.3) розглянемо ділянку провідника dl

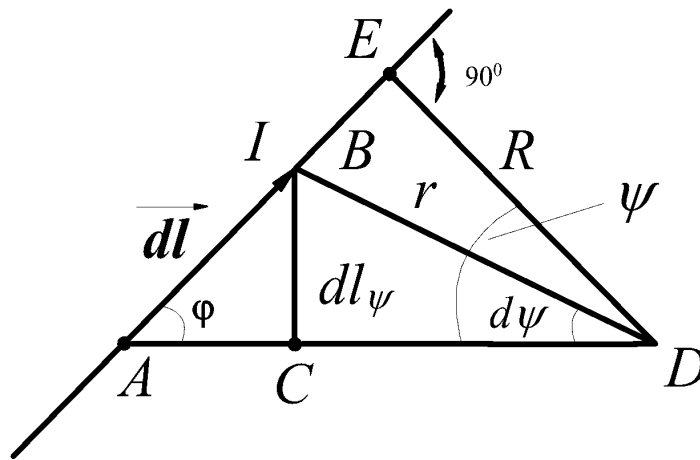


Рисунок 3.3 До визначення напруженості магнітного поля.

Закон Біо – Савара (застосування на прикладі)

Розглянувши останню формулу, можна зробити висновок, що інтеграл має нескінченні межі інтегрування. Для того, щоб ці межі інтегрування були визначеними, використаємо співвідношення із трикутників ABC, BCD відповідно:

$$dl_{\psi} = dl \sin \varphi$$

$$dl_{\psi} = r \sin d\psi \approx rd\psi$$

Після заміни $dl \sin \varphi$ на $rd\psi$ з урахуванням кінцевої формули та зміни границь інтегрування, маємо

$$H = \frac{I}{4\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{r}$$

З трикутника AED (враховуючи, що внаслідок нескінченно малого значення dl AD=BD) маємо:

$$\cos \psi = \frac{R}{r} \Rightarrow r = \frac{R}{\cos \psi}$$

Підставимо останній вираз в рівняння і отримаємо

$$H = \frac{I}{4\pi R} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi$$

Після інтегрування останнього рівняння, отримуємо вираз для напруженості магнітного поля

Визначимо вектор \vec{H} :

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R} \vec{1}_n$$

де $\vec{1}_n$ - це вектор перпендикулярний до площини з провідником із струмом та вектором . Таким чином встановлено, що значення напруженості магнітного поля, яку створює нескінченно довгий провідник зі струмом , визначають за останньою формулою, напрям вектора визначають за дотичною до концентричних кіл навколо провідника зі струмом.

3.2. Закон повного струму

3.2.1. Закон повного струму в інтегральній формі

Оцінимо роботу поля з переміщення пробного заряду вздовж замкнутого контуру. Цю роботу визначають в загальному випадку інтегралом за контуром:

$$A = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_m \int \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

Контур (рис.3.4) може охоплювати струм I , а може і не охоплювати. Вважаємо, що струм I протікає в нескінченно тонкому і довгому провіднику. Вектор $d\vec{l}$ є дотичною до контуру, вектор $d\vec{l}_\phi$ - напрямлений в тому ж напрямку, що й вектор \vec{H} , а $d\vec{l}_r$ перпендикулярний до нього. Напрям силових ліній вектора напруженості магнітного поля \vec{H} визначають правилом свердлика.

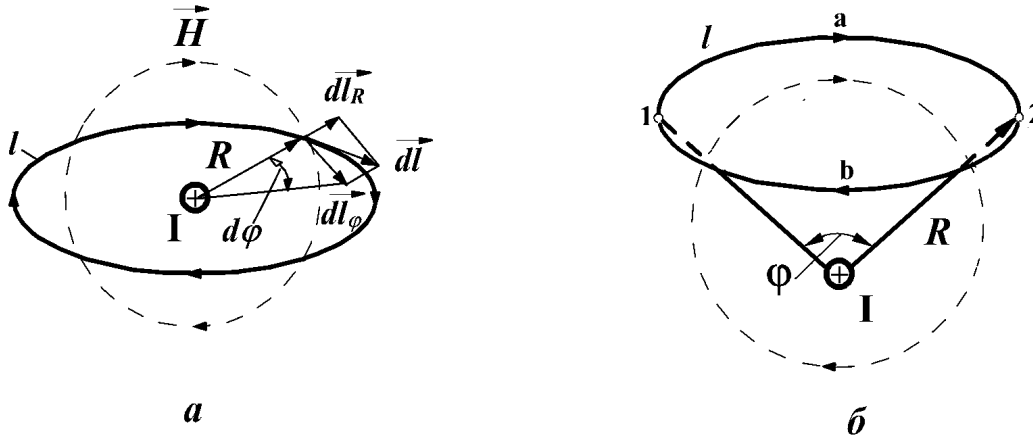


Рисунок 3.4 Провідник із струмом: а - охоплений контуром ; б - неохоплений контуром

Циркуляція вектора \vec{H} за замкнутим контуром дорівнює алгебраїчній сумі струмів, які охоплює цей контур.

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{n=1}^k I = I_\Sigma$$

Проаналізуємо першу ситуацію, коли контур охоплює струм I (рис. 3.4а). Позначимо відстань від провідника до елемента контуру dl через R та визначимо:

$$d\vec{l} = d\vec{l}_R + d\vec{l}_\varphi$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{H} \cdot d\vec{l}_R + \int \vec{H} \cdot d\vec{l}_\varphi.$$

З правої частини маємо: оскільки вектори $d\vec{l}_R$ і \vec{H} взаємно перпендикулярні їх скалярний добуток дорівнює нулю; напрямки векторів $d\vec{l}_R$ і \vec{H} співпадають – добуток цих векторів дорівнює добутку їх модулів. Отже:

$$\left. \begin{aligned} \vec{H} \cdot d\vec{l}_R &= H dl_R \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}_R) = 0, \\ \vec{H} \cdot d\vec{l}_\varphi &= H dl_\varphi \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}_\varphi) = H dl_\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Із урахуванням, що $dl_\varphi \cong R \sin d\varphi$:

та за умови малого кута $d\varphi$ $dl_\varphi \cong R d\varphi$
 рівняння набуває вигляду: $\int_l H dl_\varphi \Rightarrow \int_0^{2\pi} HR d\varphi = HR2\pi$

$$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{n=1}^k I = I_{\Sigma}.$$

З'ясуємо іншу ситуацію, якщо контур не охоплює провідник зі струмом. Проведемо дві прямі, дотичні до контуру в точках 1 та 2. Тоді контур умовно розділено на дві траєкторії 1a2 та 2b1:

В цій ситуації циркуляція вектора \vec{H} є сума двох інтегралів:

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi} \left[\int_{1a2} d\varphi + \int_{2b1} d\varphi \right] = 0.$$

Перший інтеграл характеризує роботу поля з переміщення пробного заряду за траєкторією 1a2, а другий – за траєкторією 2b1. Оскільки кути за колами 1a2 та 2b1 однакові за значенням та протилежні за знаком в результаті маємо нуль.

3.2.2. Закон повного струму в диференціальній формі

Визначимо в просторі точку $a(x, y, z)$, де напруженість поля \vec{H}_a :

$$\vec{H}_a = \vec{i}H_{ax} + \vec{j}H_{ay} + \vec{k}H_{az}.$$

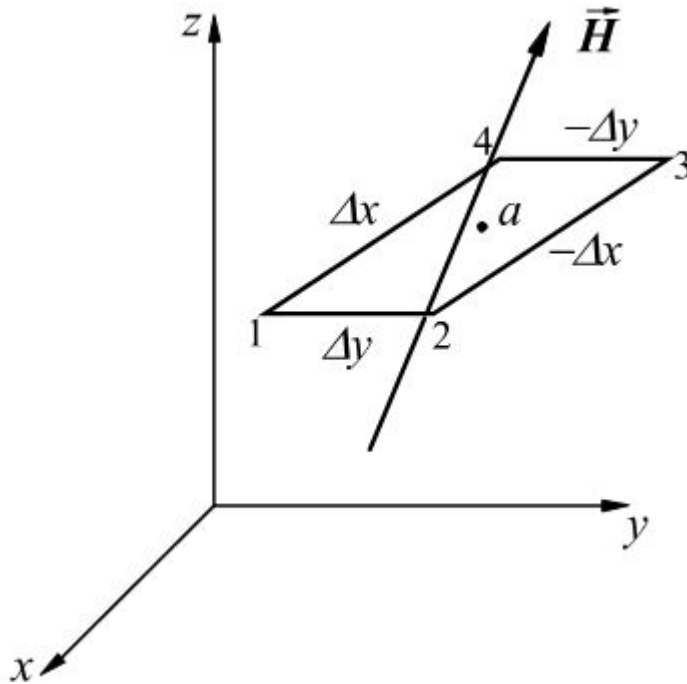


Рисунок 3.5. До визначення закону повного струму в диференціальній формі (модель площини, яка паралельна xOy)

Визначимо циркуляцію вектора \vec{H} навколо точки a , спочатку в площині xOy (рис. 3.5).

$$\oint_{1234} \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{H} \cdot \Delta\vec{l})_{12} + (\vec{H} \cdot \Delta\vec{l})_{23} + (\vec{H} \cdot \Delta\vec{l})_{34} + (\vec{H} \cdot \Delta\vec{l})_{41}.$$

Відповідно до рис. 3.5 із урахуванням напрямку руху за контуром 1-2-3-4-1 формула є такою:

$$\oint_{1234} \vec{H} \cdot d\vec{l} \Rightarrow H_{y12}\Delta y + H_{x23}(-\Delta x) + H_{y34}(-\Delta y) + H_{x41}\Delta x.$$

Визначимо H_{y12} з урахуванням змінення H_y вздовж осі x

$$H_{y12} \Rightarrow H_{ay} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}.$$

Тоді

$$(\vec{H} \cdot \Delta\vec{l})_{12} = (H_{ay} + \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2})\Delta y.$$

Те ж саме запишемо для інших сторін чотирикутника:

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{l})_{23} \Rightarrow -\left(H_{ax} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x,$$

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{l})_{34} \Rightarrow -\left(H_{ay} - \frac{\partial H_y}{\partial x} \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y,$$

$$(\vec{H} \cdot \Delta \vec{l})_{41} \Rightarrow \left(H_{ax} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta x.$$

$$\oint_{1234} \vec{H} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \frac{\partial H_y}{\partial x} \Delta x \Delta y - \frac{\partial H_x}{\partial y} \Delta x \Delta y = \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y = J_z \Delta x \Delta y.$$

Це закон повного струму за контуром 1-2-3-4-1 – в дужках маємо проекцію густини струму J_z (за напрямком z). Аналогічно для площин zOx та yOz отримуємо:

$$zOx: \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \Delta x \Delta z = J_y \Delta x \Delta z,$$

в дужках густина струму J_y (за напрямком y);

$$yOz: \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \Delta x \Delta z = J_x \Delta y \Delta z,$$

в дужках густина струму J_x (за напрямком x).

Тобто співвідношення для густини струму в різних напрямках:

$$J_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta x \Delta y} ;$$

$$J_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta x \Delta z}$$

$$J_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta y \Delta z} .$$

Границі від правих частин рівнянь є проекціями ротора на осі, перпендикулярні відповідним площинам:

$$\lim_{\Delta x \Delta y \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta x \Delta y} = \text{rot}_z \vec{H} ,$$

$$\lim_{\Delta x \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta x \Delta z} = \text{rot}_y \vec{H} ,$$

$$\lim_{\Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Delta y \Delta z} = \text{rot}_x \vec{H} ,$$

Таким чином межа відношення *циркуляції вектора* до елемента площини за умов прямування цієї площини до нуля є проекція *ротора* цього вектора на нормаль до даної площини.

Тобто можемо трактувати операцію *rot*, як *диференціальну характеристику циркуляції*.

В декартовій системі координат ротор визначають:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{i}\text{rot}_x\vec{H} + \vec{j}\text{rot}_y\vec{H} + \vec{k}\text{rot}_z\vec{H} = \vec{i}J_x + \vec{j}J_y + \vec{k}J_z.$$

Тобто маємо закон повного струму в диференціальній формі:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J}_{\text{тп}}.$$

У компактній матричній формі операцію *rot* визначають як

$$\nabla \times \vec{H} = \text{rot}\vec{H} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{bmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)$$

3.2.3. Перетворення (теорема) Стокса

З'ясуємо взаємозв'язок сумарного струму I в контурі L із густиною струмів \vec{J} . Перетворення Стокса пов'язує інтеграли різного порядку (на зразок перетворення (теорема) Гаусса - Остроградського). Вона дозволяє переходити від лінійного інтеграла до поверхневого, і навпаки, що в деяких ситуаціях суттєво полегшує розв'язування задач електродинаміки.

Скористаємось підходом аналогічно п.2.3.3 для перетворення Гаусса – Остроградського. Розгляд почнемо зі струму I і скористаємось відомими формулами:

$$I = \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Отримуємо:

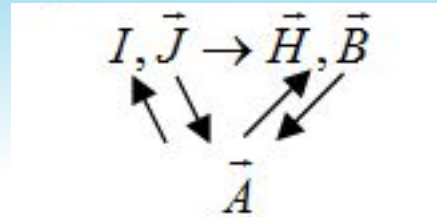
$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S}.$$

Циркуляція \vec{H} в довільному замкнутому контурі дорівнює потоку його ротора через поверхню, обмежену цим контуром.

Тобто циркуляція вектора за довільним замкнутим контуром дорівнює потоку його ротора через поверхню, обмежену цим контуром.

3. 3. Розв'язування прямої задачі магнітного поля постійного струму в загальній формі

Як встановлено вище, першопричиною магнітного поля є струм:



де \vec{H} – визначає силовий вплив, тобто напруженість магнітного поля, \vec{B} – густину потоку, \vec{A} є допоміжний параметр – *векторний магнітний потенціал*.

Встановимо зв'язок між густиною струму $\vec{J}(x, y, z)$ та напруженістю \vec{H} магнітного поля створеного струмом.

Вектор \vec{H} визначають трьома проекціями, тому для розв'язання цієї задачі знадобиться система не менш, як із трьох рівнянь.

Перше рівняння – закон повного струму в диференціальній формі: $rot\vec{H} = \vec{J}$.

Магнітне поле існує у певному середовищі, яке характеризується магнітною лискністю, тому друге рівняння це:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \text{ – друге матеріальне рівняння середовища}$$

Третє рівняння – аналог закону Гаусса – Остроградського в інтегральній формі, овно магнітних тіл:

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m,$$

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \text{ - в інтегральній формі,}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \text{ - в диференціальній формі.}$$

Нагадаємо, що з векторного аналізу відомо: якщо дивергенція будь-якого вектора дорівнює нулю, наприклад, $\operatorname{div} \vec{L} = 0$, то можна стверджувати, що існує деякий вектор \vec{M} , ротор якого дорівнює вихідному вектору \vec{L} , тобто $\operatorname{rot} \vec{M} = \vec{L}$. Це положення ілюструє рис. 3.6.

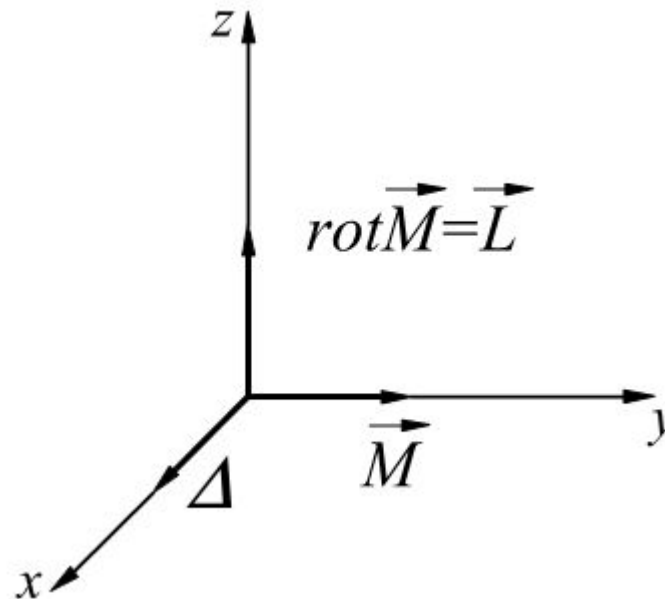


Рисунок 3.6. До пояснення положення: якщо $\operatorname{div} \vec{L} = \nabla \cdot \vec{L} = 0$ то існує вектор \vec{M} , ротор якого дорівнює \vec{L} , $\operatorname{rot} \vec{M} = \nabla \times \vec{M} = \vec{L}$

На основі цього твердження отримаємо ще одне рівняння:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A},$$

де \vec{A} векторний магнітний потенціал.

Визначимо одиницю вимірювання векторного потенціалу з отриманої формули:

$$\left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{М}^2} \right] = \left[\frac{1}{\text{М}} \cdot \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{М}} \right], \text{ тобто } [\vec{A}] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{М}} \right] = \left[\frac{\text{Вб}}{\text{М}} \right].$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A}.$$

$$\text{rot} \vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \text{rot} \vec{A}.$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \mu \vec{J}.$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{M} = \text{grad} \text{div} \vec{M} - \nabla^2 \vec{M}.$$

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}.$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

Надамо векторне співвідношення цієї формули як систему скалярних формул, як проекцій на координатні осі:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x, \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y, \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z. \end{aligned} \right\} \begin{aligned} A_x &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_x}{r} dV, \\ A_y &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_y}{r} dV, \\ A_z &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_z}{r} dV, \end{aligned}$$

$$\vec{A} = \vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z = \frac{\mu}{4\pi} \left(\vec{i} \int \frac{J_x}{r} dV + \vec{j} \int \frac{J_y}{r} dV + \vec{k} \int \frac{J_z}{r} dV \right).$$

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV. \quad \vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{Id\vec{l}}{r}.$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot} \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{J}}{r} dV.$$

Останнє рівняння – це *розв'язок прямої задачі* магнітного поля постійного струму загальної форми: визначено напруженість магнітного поля через густину струму в просторі.

3.4. Граничні умови магнітного поля постійного струму

3.4.1. Нормальні складники векторів \vec{B} та \vec{H}

Нехай вектор $\vec{B} = \mu \vec{H}$ перетинає границю поділу двох середовищ. Виділимо нескінченно малу ділянку поверхні ΔS , щоб можна було знехтувати її кривизною, і $\vec{B} = \text{const}$.

Побудуємо циліндр з поперечним перерізом ΔS , твірні якого паралельні до нормалі \vec{n} (рис. 3.7)

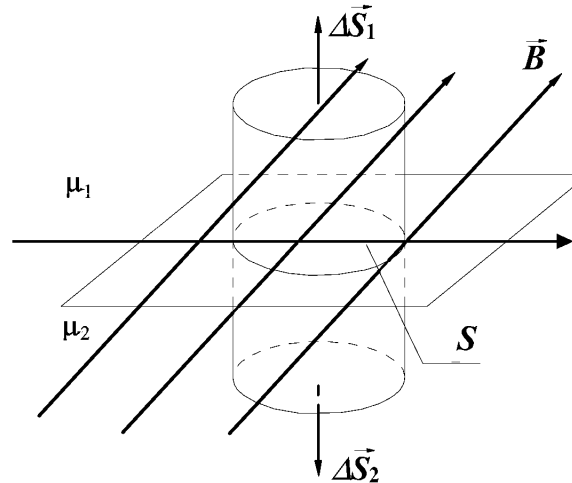


Рисунок 3.7 До визначення нормальних складових магнітного поля

Магнітні заряди існують як диполь. Тому сумарний магнітний заряд $q_{M\Sigma} = 0$, а отже аналог закону Гаусса для магнітного поля такий:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_{M\Sigma} = 0$$

Потік вектора \vec{B} – це сума потоків

$$\oint_{\Delta S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Delta S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Delta S_{\text{бок}}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Оскільки заряд зосереджено на площадці ΔS , то без втрати загального результату можна спрямувати до нуля висоту циліндра, тобто і площу бічної поверхні $\Delta S_{\text{бок}}$. Тоді

$$\oint_{\Delta S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \oint_{\Delta S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0.$$

Перший доданок характеризує стан в першому середовищі, а другий в другому. Зменшуємо ΔS так, щоб можна було вважати, що в кожній точці $B = \text{const}$ тоді:

$$\vec{B}_1 \cdot \Delta\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot \Delta\vec{S}_2 = 0.$$

За умови $|\Delta S_1| = |\Delta S_2| = \Delta S$, то з (3.60) маємо скалярні добутки:

$$B_1 \cos(\vec{B}_1 \wedge \Delta \vec{S}_1) + B_2 \cos(\vec{B}_2 \wedge \Delta \vec{S}_2) = 0.$$

Складники лівої частини рівняння є нормальними складниками вектора магнітної індукції.

$$B_{n1} - B_{n2} = 0.$$

Тобто

$$B = B$$

Для напруженості магнітного поля:

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} = 0.$$

$$\mu_1 H_{n1} = \mu_2 H_{n2} = 0.$$

3.4.2. Тангенціальні складові векторів \vec{B} та \vec{H}

Нехай вектор напруженості магнітного поля перетинає межу двох середовищ. Визначимо циркуляцію вектора \vec{H} за контуром $a-b-c-d$ (рис. 3.8). Поняття циркуляції зручно застосовувати, адже циркуляція не залежить від форми контуру, тому виберемо для зручності контур прямокутної форми $a-b-c-d$, сторони якого нескінченно малі, а напрям обходу за годинниковою стрілкою (рис. 3.8). Циркуляція \vec{H} характеризує роботу сил поля.

За визначенням для магнітного поля $\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma}$,

тобто:

$$\int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{bc} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{da} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma}$$

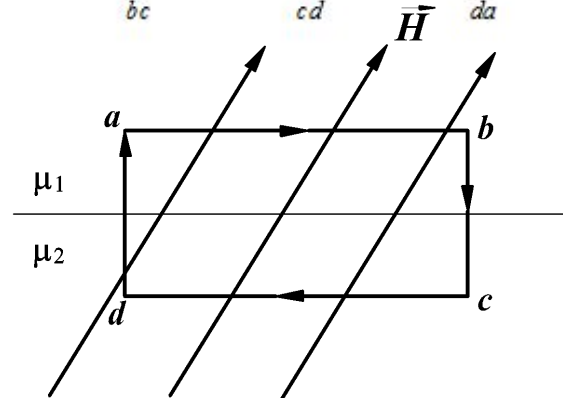


Рисунок 3.8. До визначення тангенціальних складників магнітного поля

Якщо наблизити контур до межі середовищ, то **інтеграли** $\int_{bc} \vec{H} \cdot d\vec{l}$, $\int_{da} \vec{H} \cdot d\vec{l}$ дорівнюють нулю. Тоді із (3.64) маємо

$$\int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{cd} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma}.$$

Перший доданок характеризує перше середовище, другий – друге. Сторони ab та cd, нескінченно малі величини і дорівнюють dl , тому можна вважати, що значення H однакові, тоді:

$$\left. \begin{aligned} \int_{ab} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \vec{H}_1 \cdot \overline{ab}, \\ \int_{cd} \vec{H} \cdot d\vec{l} &= \vec{H}_2 \cdot \overline{cd}. \end{aligned} \right\}$$

З (3.65) з урахуванням (3.66) та напрямків обходу контуру отримаємо:

$$H_1 ab \cos(\vec{H}_1 \wedge \overline{ab}) - H_2 cd \cos(\vec{H}_2 \wedge \overline{cd}) = I_{\Sigma}.$$

Із урахуванням, що ab=cd=dl та після скорочення маємо:

$$H_1 \cos(\vec{H}_1 \wedge \overline{ab}) - H_2 \cos(\vec{H}_2 \wedge \overline{cd}) = \frac{I_{\Sigma}}{\Delta l}.$$

$$H_{1r} - H_{2r} = \frac{I_{\Sigma}}{\Delta l}$$

$$H_{1r} - H_{2r} = J_{\text{пов}},$$

3.4.3. Граничні умови на поверхні ідеального провідника

В ідеальному провіднику магнітне поле відсутнє.

Для тангенціальних складових з рівності (3.4-13) за умови, що всередині ідеального провідника поля немає, маємо (результуюче поле відсутнє)

$$H_{\tau 1} = J_{нов} \neq 0$$

тобто на границі розподілу існує ненульова дотична складова вектора напруженості магнітного поля.

Нормальну складову вектора напруженості магнітного поля знайдемо з рівності (3.4-4), враховуючи що всередині провідника магнітне H_{n2} відсутнє.

$$H_{n1} = 0$$

тобто на границі розподілу середовищ нормальна складова вектора напруженості магнітного поля відсутня .

Отже, силові лінії на границі розподілу середовищ орієнтовані тільки вздовж дотичної до поверхні провідника, тоді як силові лінії електричного поля напрямлені до провідника вздовж нормалі.

Таблиця 3.1
Граничні умови магнітного поля при постійному струмі

Складова поля	Базові співвідношення	Граничні умови	
		В загальному вигляді	З ідеальним провідником
Нормальна n	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_{m\Sigma} = 0.$	$B_{n1} - B_{n2} = 0.$	$H_{1n} = 0$
Тангенціальна τ	$\int_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\Sigma}$	$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = J_{нов}$	$H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ $H_{\tau 2} = 0$

3.5. Поняття індуктивності. Енергія магнітного поля постійного струму

Індуктивність – властивість фізичних об'єктів накопичувати та віддавати енергію магнітного поля. Место для формулы.

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

де $L = \frac{\Phi}{I}$ - індуктивність провідника. За одиницю індуктивності приймають індуктивність dI

Енергія магнітного поля дорівнює роботі, витраченій струмом на створення цього поля. За умови зміни струму на dI , магнітний потік змінюється на величину $d\Phi = L dI$

Для зміни магнітного потоку на величину $d\Phi$ необхідно виконати роботу

$$dA = I d\Phi =$$

Проінтегрувавши це рівняння, отримаємо формулу для роботи, яку необхідно виконати для створення магнітного поля:

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}$$

Відповідно енергія магнітного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2}$$

$$W = \int \frac{\mu H^2}{2} dV = \int \frac{\vec{H} \cdot \vec{B}}{2} dV$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{w \int B \cdot dS}{\frac{1}{w} \int H dl} = \frac{w^2 \mu HS}{lH} = \mu w^2 \frac{S}{l},$$

$$W = \frac{B^2}{2\mu} V = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} V$$

3.6. Висновки

- Протікання в провіднику постійного струму створює навколо нього магнітне поле.
- Проявом магнітного поля є сила взаємодії умовних магнітних зарядів $F_m, [H]$.
- Для використання співвідношень отриманих в електростатиці розроблена модель магнітного дротика (спиці) із зосередженим на кінцях умовними магнітними зарядами $q_m, [B \cdot c]$.
- Для визначення магнітного характеру сили взаємодії рухомих зарядів використовують поняття вектор напруженості магнітного поля $H = \frac{F_m}{q_m}, \left[\frac{A}{M} \right]$
- Для визначення характеристик магнітного поля, незалежно від параметрів середовища використовують поняття вектор магнітної індукції $B = \mu H, \left[\frac{Bc}{M^2} = \frac{Bb}{M^2} = Tl \right]$
- Для опису характеристик магнітного поля використовують поняття – потік вектора магнітної індукції, циркуляція вектора напруженості магнітного поля, дивергенція та ротор.
- Співвідношення між напруженістю магнітного поля та його джерелом, електричним струмом, визначає закон Біо-Савара.
- Магнітне поле має вихровий характер, тому потік вектора та дивергенція магнітної індукції дорівнюють нулю. $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_{m\Sigma} = 0.$

-Для визначення характеристик магнітного поля, яке створює струм в реальних провідниках використовують закон повного струму (круговий закон Ампера) інтегральній, та $rot H = J$ диференціальній формах.
$$\oint_l H \cdot dl = I_{\Sigma}$$

-Для вирішення задач електродинаміки є корисним перетворення (теорема) - Стокса:
$$\oint_l H \cdot dl = \int_s rot H \cdot dS$$

-Розв'язку задач магнітного поля сприяє введення поняття векторного магнітного потенціала
$$A = \frac{1}{\mu} rot H$$

-Векторний магнітний потенціал визначають із розв'язку аналога рівняння Пуассона ,
$$\nabla^2 A = \mu J$$
 звідки
$$A = \frac{\mu}{4\pi r} \int J dV$$

-Індуктивність - це фізична величина, яка характеризує можливість накопичення та віддавання магнітної енергії.
$$L = \frac{\Phi}{I}$$

-Магнітне поле є носієм енергії, яку можна визначити через індуктивність:

$$W_n = \frac{LI^2}{2} \quad W = \int \frac{\mu H^2}{2} dV; W = \int \frac{H \cdot B}{2} dV$$

3.7. Контрольні питання та завдання

1. Обґрунтуйте застосування *аналога закону Кулона* для магнітного поля.
2. Сформулюйте *закон Біо-Савара*.
3. Сформулюйте сутність та наведіть визначення *напруженості магнітного поля, як силової характеристики поля*, обґрунтуйте одиниці вимірювання електромагнітної індукції.
4. Сформулюйте сутність визначення вектора магнітної індукції.
5. Наведіть основні дескриптори магнітного поля.
6. Поясніть сутність понять: «магнітна сприйнятливість», «магнітна проникність» та «намагніченість».
7. Доведіть теорему (перетворення) Стокса.
8. Поясніть сутність закону повного струму в інтегральній та диференціальній формах.
9. Наведіть нормальний та тангенціальний складники векторів та .
10. Виведіть формулу закону постійного струму.
11. Поясніть фізичну сутність поняття *ротор*.
12. Сформулюйте поняття: «індуктивність».
13. Виведіть формулу для магнітного поля постійного струму навколо ідеального провідника.
14. Обґрунтуйте поняття «векторний магнітний потенціал».
15. Обґрунтуйте та виведіть *аналог рівняння Пуассона для магнітного поля постійного струму*.
16. Наведіть алгоритм розв'язку прямої задачі магнітного поля постійного струму.
17. Виведіть формулу для індуктивності дроселя.
18. Виведіть формули енергії магнітного поля постійного струму.