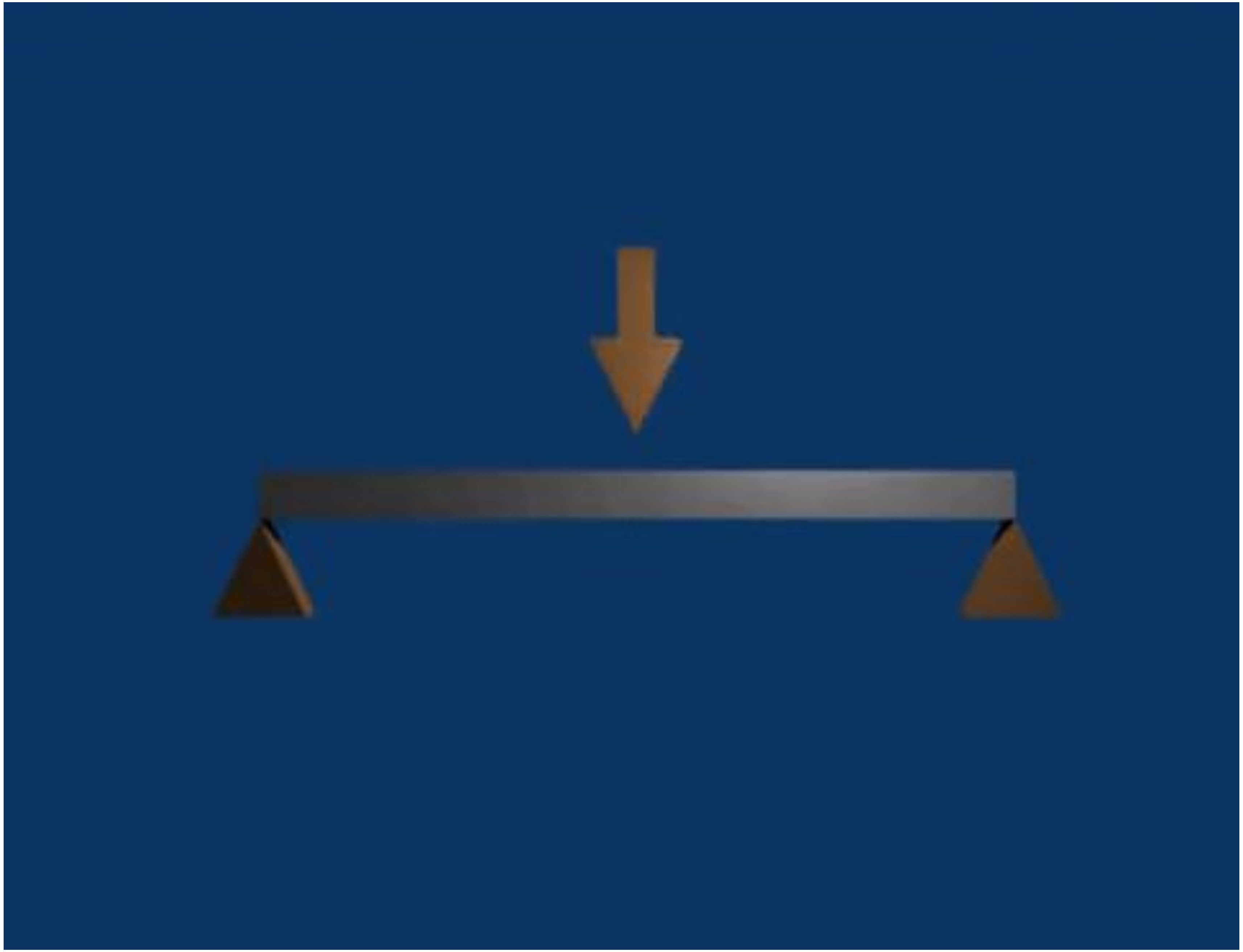
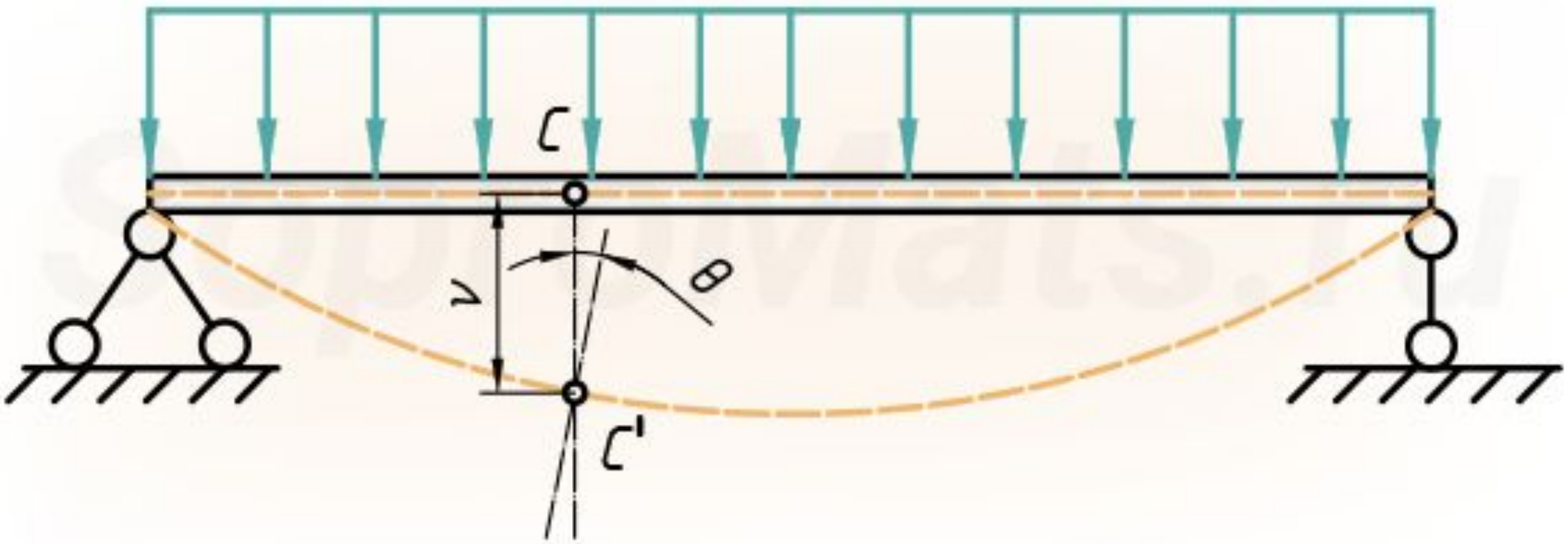
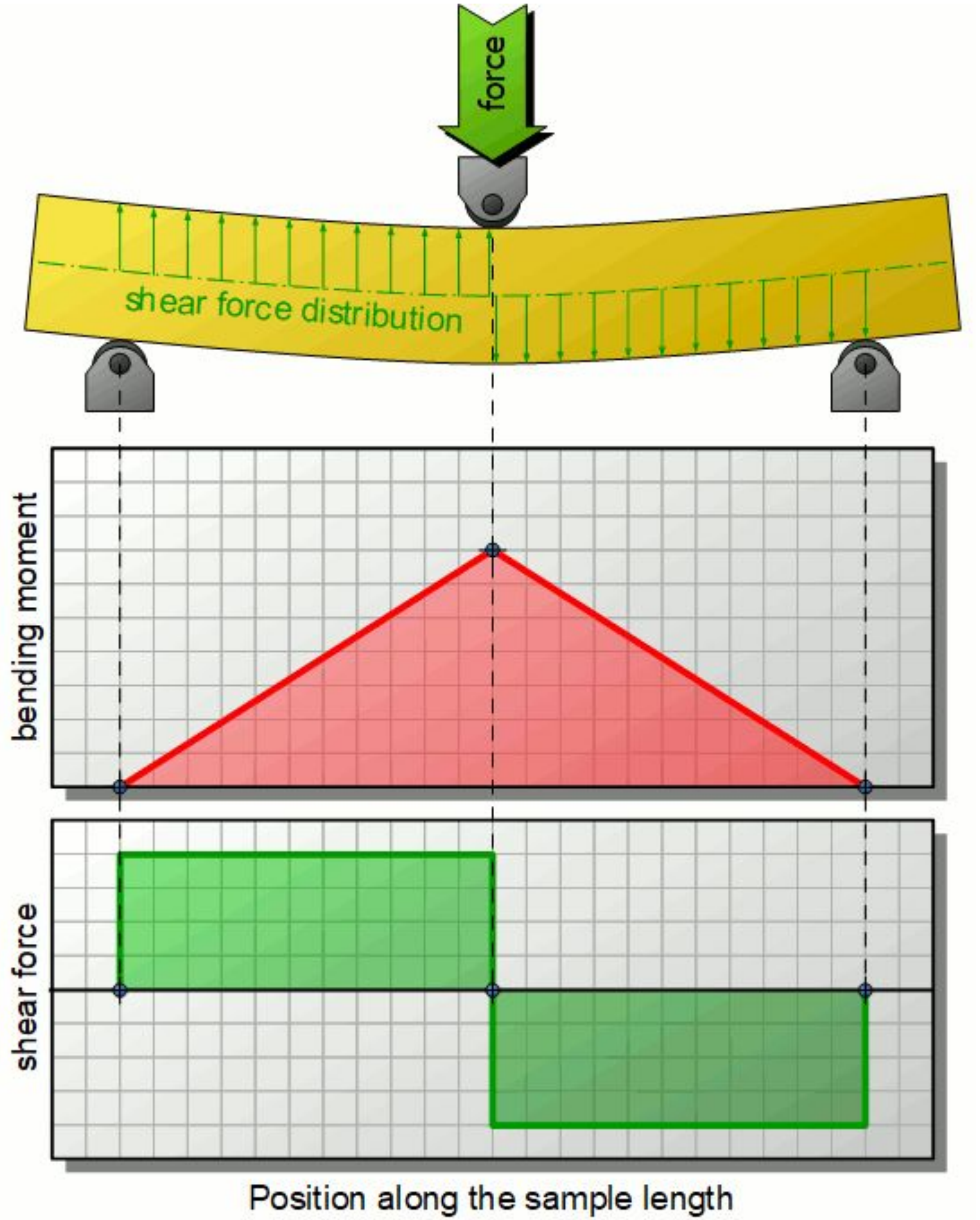
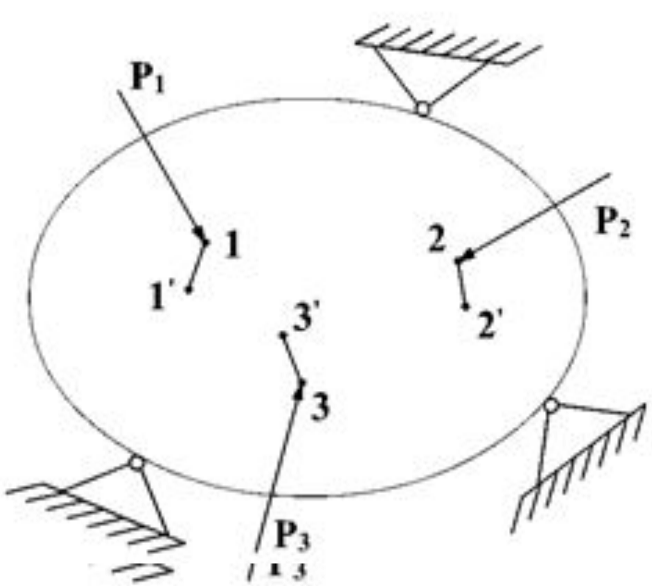
Енергетичні методи визначення переміщень

Принцип можливих переміщень
(варіаційний принцип Лагранжа)

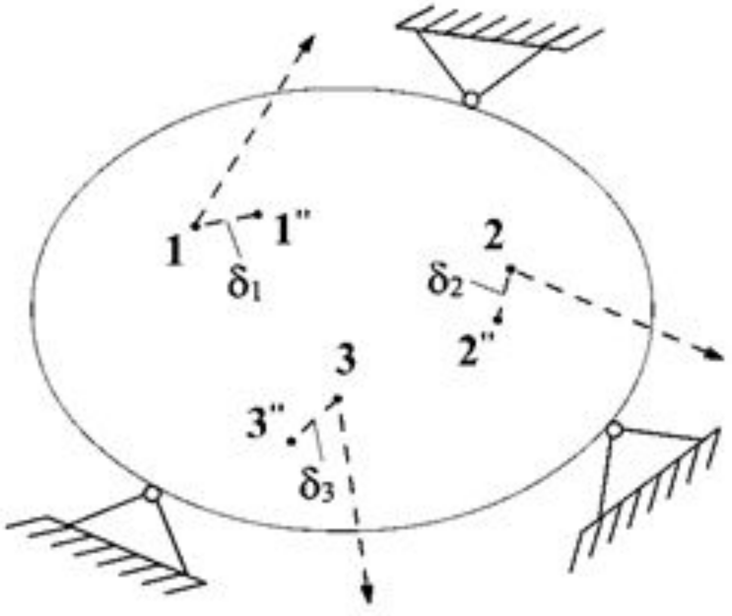



C
v
θ
C'

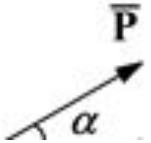

force
shear force distribution
bending moment
shear force
Position along the sample length



Розглянемо тіло, закріплене на трьох опорах. Після прикладання до тіла системи сил $P_1, P_2, P_3 ...$ тіло здеформується, а точки тіла перемістяться.
$11', 22', 33'$ - це реальні переміщення точок від дії заданих сил.
Якщо тіло навантажити іншою уявною системою сил, то переміщення точок будуть інші. По відношенню до заданої системи ці переміщення є *можливими*.
Тобто можливими називають уявні переміщення точок тіла, які допускаються накладеними на тіло зовнішніми зв'язками (закріпленнями) і які виникають від дії на тіло будь-якої іншої від заданої системи сил.



Позначаються можливі переміщення - δ.
Можливі переміщення вважають достатньо малими, щоб напрямки сил можна було вважати незмінними.
Робота справжніх (заданих) сил P_1, P_2, P_3 на можливих переміщеннях $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ називають можливою роботою - W_3

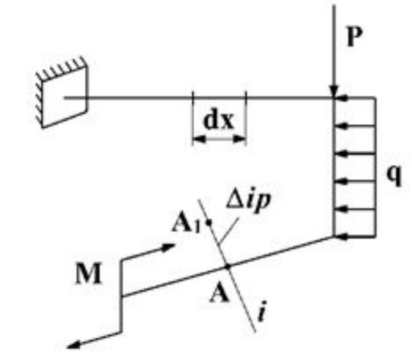


$W_3 = \overline{P_1} \cdot \overline{\delta_1} + \overline{P_2} \cdot \overline{\delta_2} + \overline{P_3} \cdot \overline{\delta_3}$;

Можливі переміщення можуть бути лінійні (видовження, прогин) або кутові (кути закручування, зсуву тощо).
Під час пружної деформації тіла в його елементі виникають внутрішні зусилля N, M_{KP}, M, Q як сили пружного опору. Можна обчислити їх роботу на можливих переміщеннях $\delta - W_B$. Робота внутрішніх сил від'ємна, тому що це робота протидії деформованого тіла. Напрямок переміщень точок від зовнішнього навантаження і напрямок внутрішніх сил протилежні.
Принцип можливих переміщень: *якщо пружна система перебуває в рівновазі під дією прикладеного навантаження, то сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил на можливих нескінченно малих переміщеннях точок системи дорівнює нулю.*

$$\boxed{W_З + W_B = 0}.$$

Визначення переміщень методом Мора

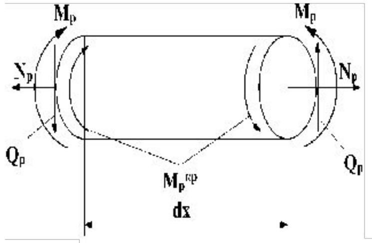


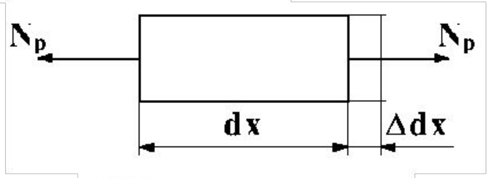
Нехай на стержневу систему діє система зовнішніх сил. Необхідно визначити переміщення т. A в напрямку $i-i-\Delta_{ip}$.

Індекс «i» означає напрямок переміщення.

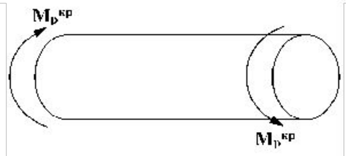
Індекс «p» означає, що переміщення спричинене заданими силами.

У перерізах стержнів виникають внутрішні зусилля: поздовжня сила N_P, поперечна сила Q_P, згинальний момент M_P, крутний момент M_P^{KP}. Розглянемо елемент стержня довжиною dx під дією внутрішніх зусиль і визначимо деформацію стержня від кожного зусилля окремо. По відношенню до виділеного елемента внутрішні зусилля можна розглядати, як зовнішнє навантаження.

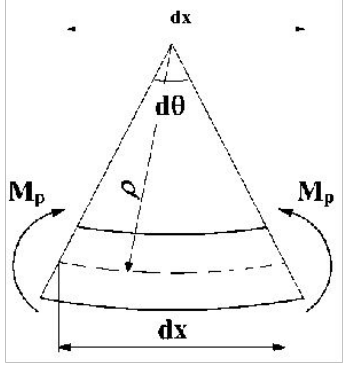




$$\Delta dx = \frac{N_P dx}{EF};$$



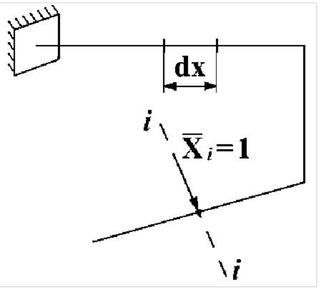
$$d\varphi = \frac{M_P^{KP} dx}{GI_K};$$



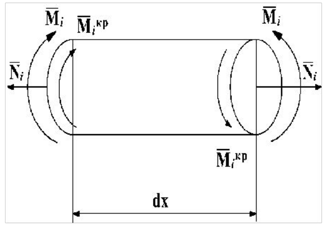
$$d\theta = \frac{dx}{\rho};\ \frac{1}{\rho} = \frac{M_P}{EI};$$

$$d\theta = \frac{M_P dx}{EI}$$

Розрахунки показують, що переміщення від Q незначні, тому ними нехтують.



Розглянемо попередню стержневу систему і навантажимо її одиничною силою $\overline{X}_i = 1$ в напрямку $i-i$. Будемо називати її допоміжною або одиничною системою. На елемент стержня довжиною dx будуть діяти внутрішні зусилля $\overline{N_i};\overline{M_i};\overline{M_i^{KP}}$. Дією $\overline{Q_i}$ будемо нехтувати.



Будемо вважати переміщення, викликані заданим навантаженням, можливими по відношенню до одиничної системи. Знайдемо роботу зовнішніх і внутрішніх сил одиничної системи на цих переміщеннях.

де n – кількість стержнів, ℓ – довжина стержнів.

Згідно з принципом можливих переміщень

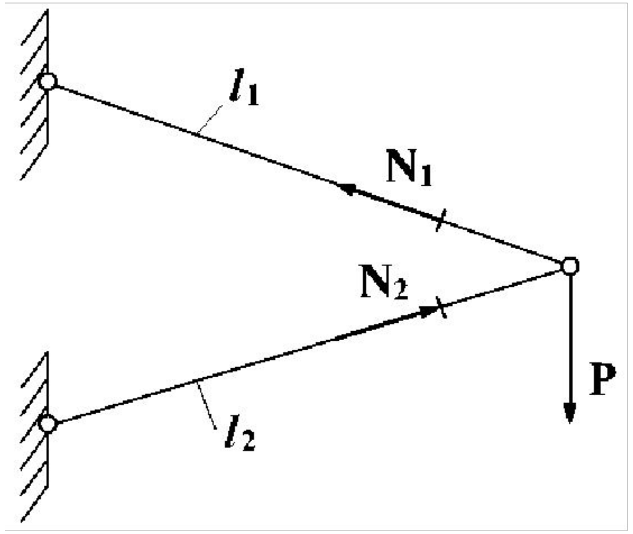
$W_З + W_В = 0$. Звідси $W_З = -W_В$.

Підставляючи значення робіт (9.2) і (9.3), знаходимо

$$\boxed{\Delta_{ip} = \sum_n \int_\ell \frac{\overline{N_i} N_p dx}{EF} + \sum_n \int_\ell \frac{\overline{M_i^{KP}} M_P^{KP} dx}{GI_K} + \sum_n \int_\ell \frac{\overline{M_i} M_P dx}{EI}}.$$

Одержані інтеграли називаються інтегралами Мора.

Одержані інтеграли називаються інтегралами Мора.



Для систем, що складаються із прямолінійних стержнів, з’єднаних шарнірами, формула (9.4) для визначення переміщень шарнірів приймає вигляд

$$\Delta_{ip} = \sum_{n} \int_{\ell} \frac{\overline{N}_i N_p dx}{EF}$$

Враховуючи, що $\overline{N}_i$ і N_p не змінюються по довжині стержнів, можемо записати

$$\boxed{\Delta_{ip} = \sum_{n} \frac{\overline{N}_i N_p \ell_n}{EF_n}}$$

Ця формула називається формулою Максвела-Мора.

Порядок визначення переміщень методом Мора:

1) Будуємо допоміжну стержневу систему й навантажуємо її в точці, де потрібно визначити переміщення, одиничною силою в напрямку переміщення при визначенні лінійних переміщень, або одиничним моментом при визначенні кутових переміщень ($\overline{X} = 1$ - це безрозмірна величина).

2) Для кожної ділянки заданої і допоміжної системи, які повинні бути однакові, виписуємо вирази для внутрішніх силових факторів $M_p^{кр}(x), M_p(x), N_p(x)$ і $\overline{M}_i^{кр}(x), \overline{M}_i(x), \overline{N}_i(x)$ відповідно.

Граничні зміни *x* для заданої і допоміжної системи – однакові.

3) Обчислюємо інтегралами Мора для всіх ділянок, а потім їх підсумовуємо і взнаємо переміщення.

4) Якщо обчислене переміщення додатне, значить його напрямок збігається з напрямком одиничної сили. Знак мінус вказує на те, що переміщення має напрямок, протилежний до напрямку одиничної сили.

Приклад 1:

Визначити прогин Δ_p посередині балки і -кут повороту на опорі.

$R_A = R_B = \frac{q\ell'}{2}$.

Задана система:

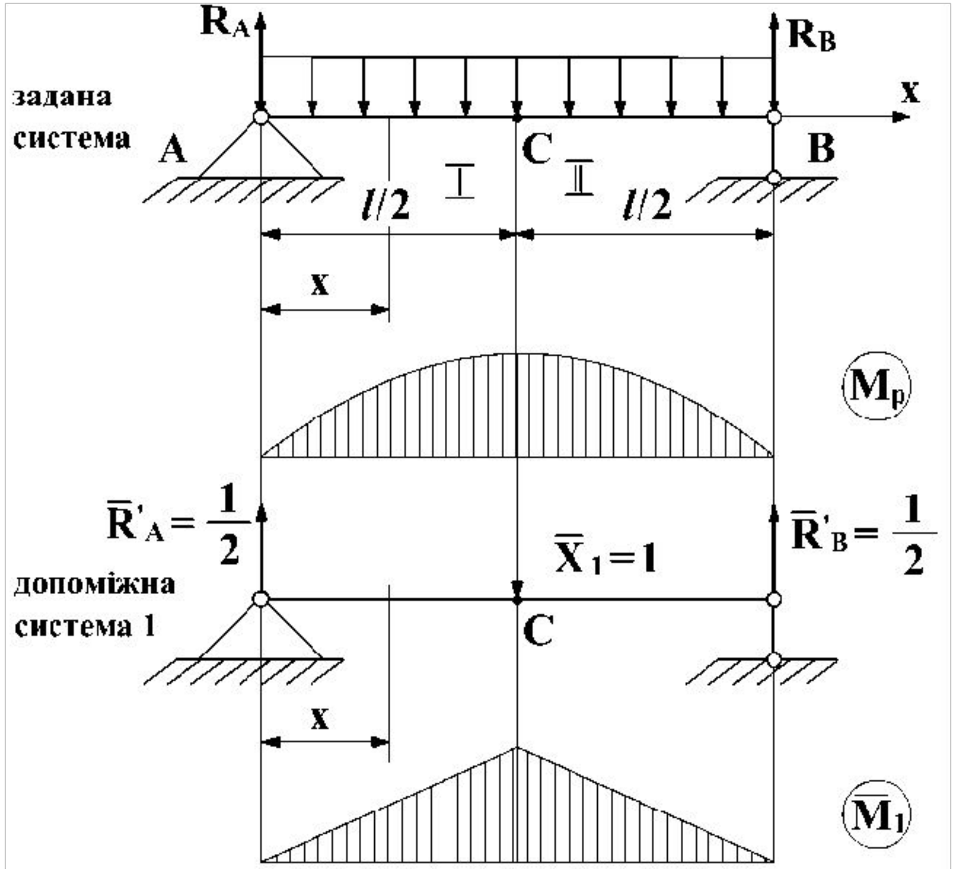
$0 \le x \le \ell/2$;

$M_P = \frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2}$.

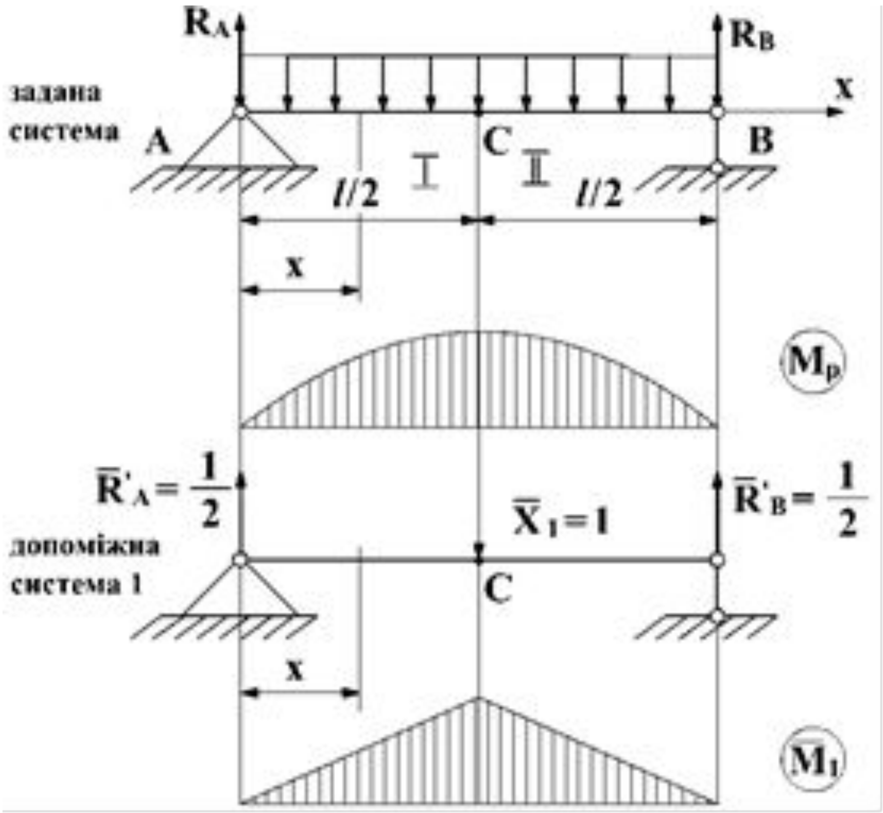
Допоміжна система 1:

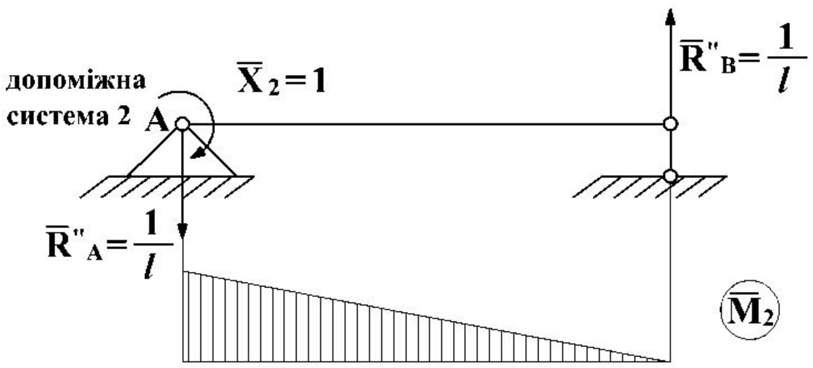
$0 \le x \le \frac{1}{2}$; $\overline{M}_1 = \frac{1}{2}x$.

Переміщення точки C:



$$\Delta_{1P} = 2\int_0^{\ell/2} \frac{M_P \overline{M_P} dx}{EI} = \frac{2}{EI}\int_0^{\ell/2}\left(\frac{q\ell}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right)\frac{1}{2}xdx = \frac{1}{EI}\left(\frac{q\ell}{2}\cdot\frac{\ell^3}{24} - \frac{q}{2}\frac{\ell^4}{64}\right) = \frac{5}{384}\frac{q\ell^4}{EI}$$





$$\overline{M_2} = 1 - \frac{x}{\ell}.$$

Поворот перерізу A:

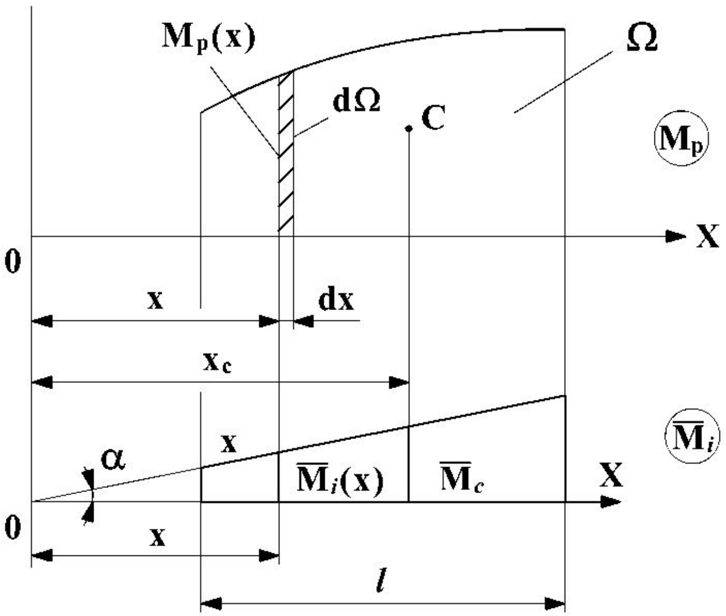
$$\Delta_{2P} = \int_0^{\ell} \frac{M_P \cdot \overline{M_2} \cdot dx}{EI} == \frac{1}{EI} \int_0^{\ell} \left(\frac{q\ell}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right) \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) dx = \frac{q\ell^3}{24EI} \quad .$$

Визначення переміщень способом Верещагіна

(Обчислення інтеграла Мора способом Верещагіна)

Обчислення переміщень за формулою Мора має недолік – необхідно складати аналітичні вирази для внутрішніх силових факторів і обчислювати інтеграли. За великої кількості ділянок це громіздко і незручно.

Верещагіним запропоновано графоаналітичний метод визначення інтегралів Мора. Розглянемо інтеграл Мора для одного із внутрішніх зусиль, наприклад для згинального моменту,



$M_P(x)dx = d\Omega;$

$\overline{M}_i(x) = xtg\alpha.$

$I = \int M_p \overline{M}_i dx = \int_\Omega tg\alpha x d\Omega = tg\alpha \int_\Omega x d\Omega;$

$\int_\Omega x d\Omega$ – статичний момент пл. Ω відносно осі OO;

C – центр ваги епюри M_P.

$$\int M_p \overline{M}_i dx = \underbrace{tg\alpha x_C}_{\overline{M}_C} \Omega = \overline{M}_C \Omega;$$

$\overline{M}_C$ – ордината одиничної епюри під центром ваги C епюри M_P.

Інтеграл Мора дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розташовану під центром ваги епюри від зовнішнього навантаження.

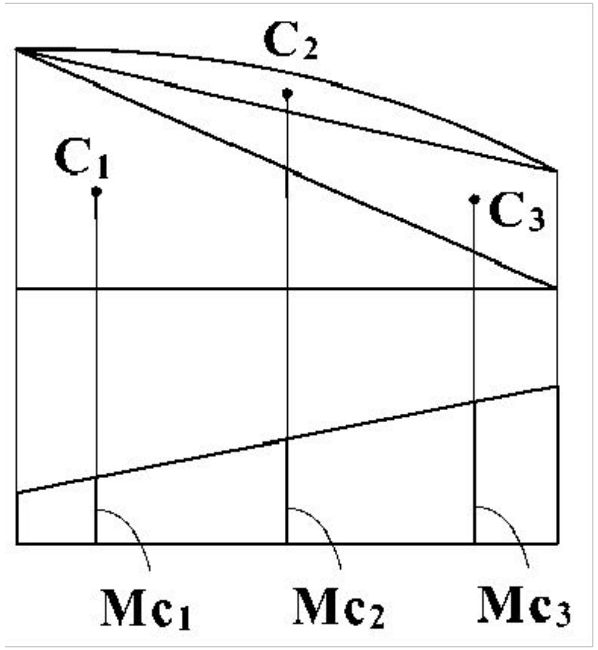
Формула для переміщення

Підставляючи (2) в (1), одержимо

$$\boxed{\Delta_{ip} = \sum \frac{\Omega_P \overline{M_C}}{EI_Z}},$$

де площа $\Omega(H \cdot м^2)$; ордината $\overline{M_C}$ (м) для одиничної сили, безрозмірна величина -- для одиничного моменту; $EI(H \cdot м^2)$.

Правила використання способу Верещагіна:



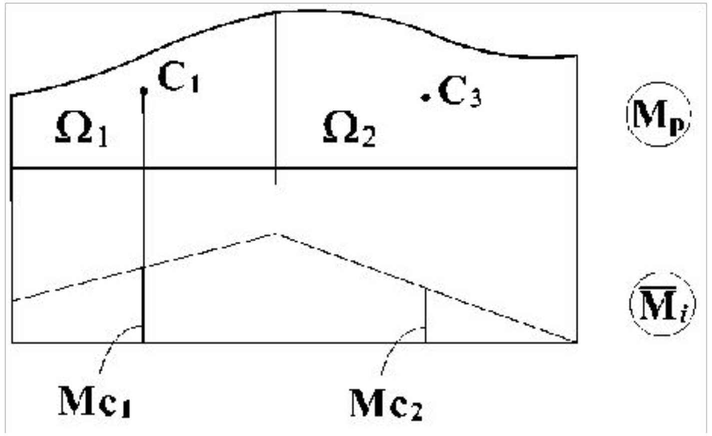
.1. Формула справедлива, коли одна з епюр прямолінійна. Така умова завжди виконується для систем з прямолінійних брусів. У цьому випадку епюра від одиночної сили завжди прямолінійна. Причому площу необхідно визначати у складної епюри, а ординату – на прямолінійній епюрі.

2. Якщо прямолінійні обидві епюри, тоді можна множити площу будь-якої з них на ординату другої, визначену під центом ваги першої.

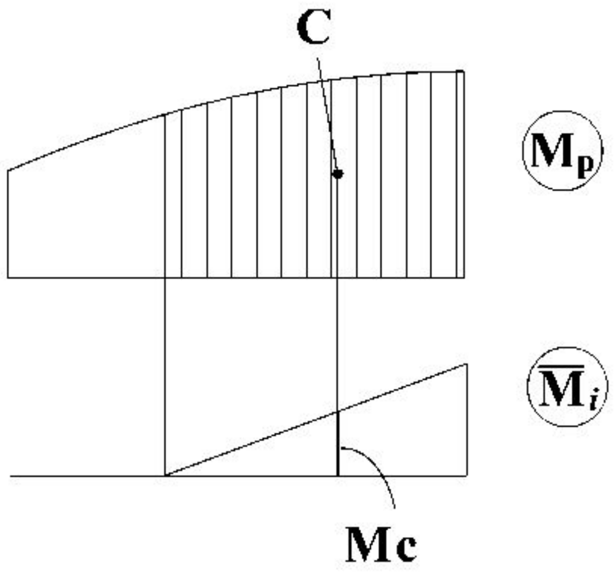
3. Коли епюра має складний вигляд тоді її можна розбити на прості фігури, для яких легко визначити площу і положення центра ваги:

$$\Delta_{ip} = \sum^{n} \frac{\Omega_P \overline{M_C}}{EI}$$

4. Якщо епюра від одиничної сили має перелом, тоді розрахунок ведемо по ділянках, на кожній з яких епюра від одиничного наватаження прямолінійна:



$$\Delta_{ip} = \sum^{n} \frac{\Omega_P \overline{M_C}}{EI}$$

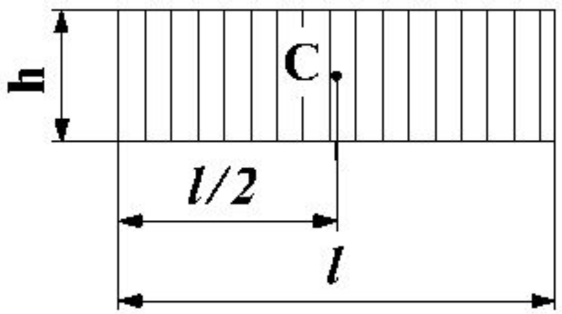


5. Якщо епюри M_P і $\overline{M_i}$ не збігаються по довжині, тоді зайві ділянки однієї із епюр відкидають.
6. Якщо епюри M_P і $\overline{M_i}$ протилежні за знаком, тоді результат множення епюр має знак «мінус»
7. При перемноженні епюр крутних моментів в знаменнику маємо GI_K, при перемноженні епюр поздовжніх сил - EF.

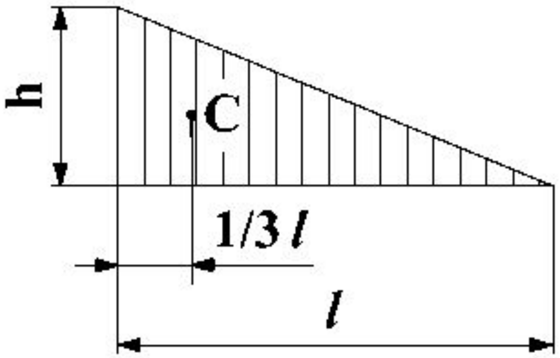
Таким чином, формула для переміщень у загальному випадку має вигляд

$$\boxed{\Delta_{ip} = \sum^{n} \frac{\Omega_{M_{KP}} \overline{M_C^{KP}}}{GI_K} + \sum^{n} \frac{\Omega_M \overline{M_C}}{EI} + \sum^{n} \frac{\Omega_N \overline{N_C}}{EF}}$$

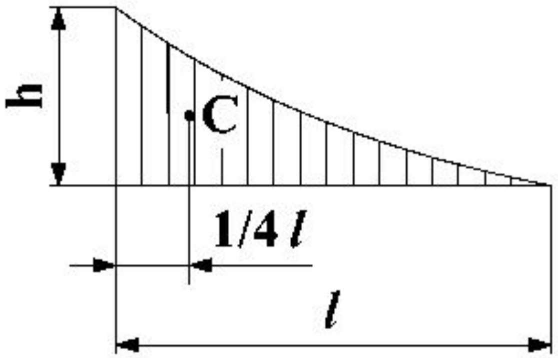
Довідкові дані:



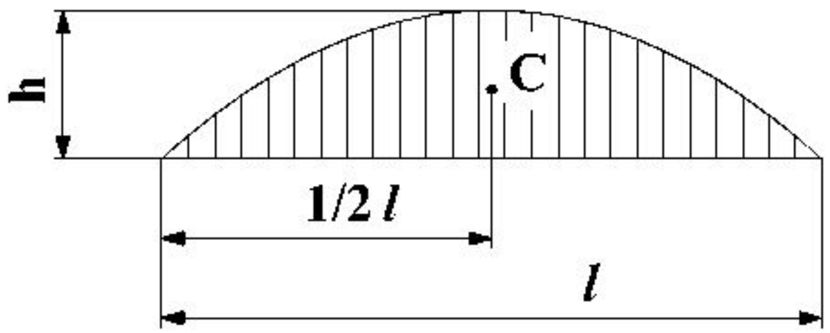
$$\Omega = l\,h$$



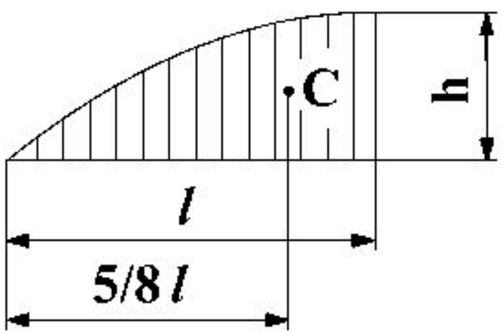
$$\Omega = \frac{1}{2}\,l\,h$$



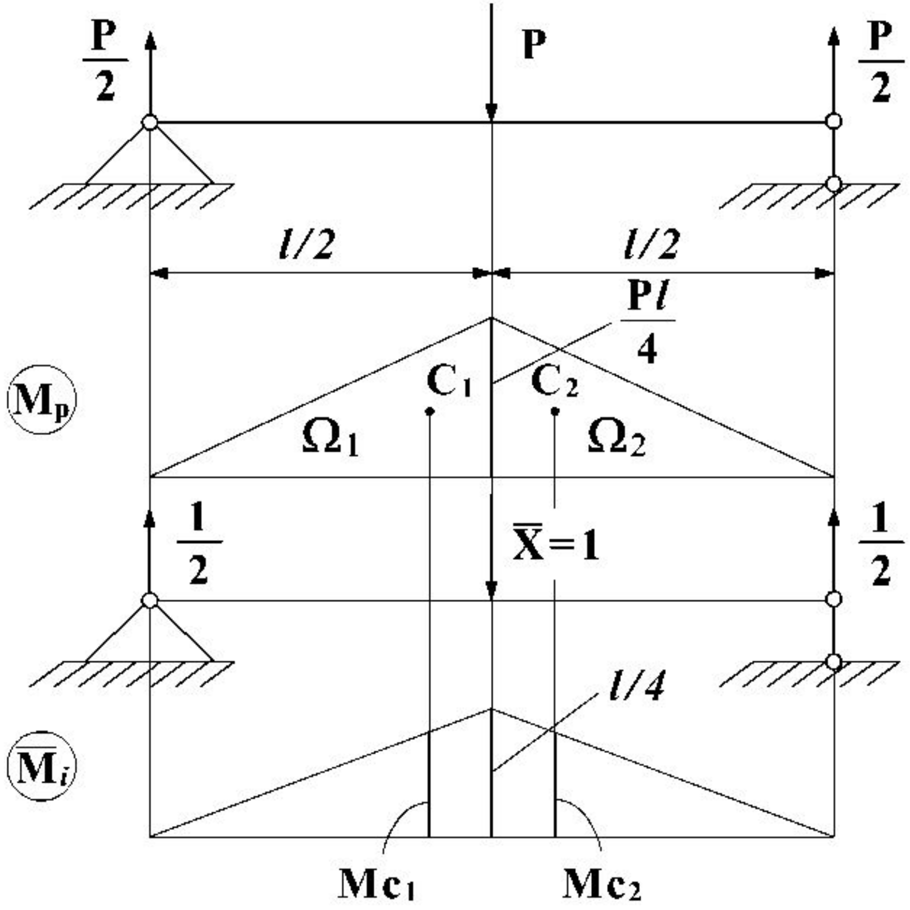
$$\Omega = \frac{1}{3}\,l\,h$$



$$\Omega = \frac{2}{3}\,l\,h$$



$$\Omega = \frac{2}{3}\,l\,h$$

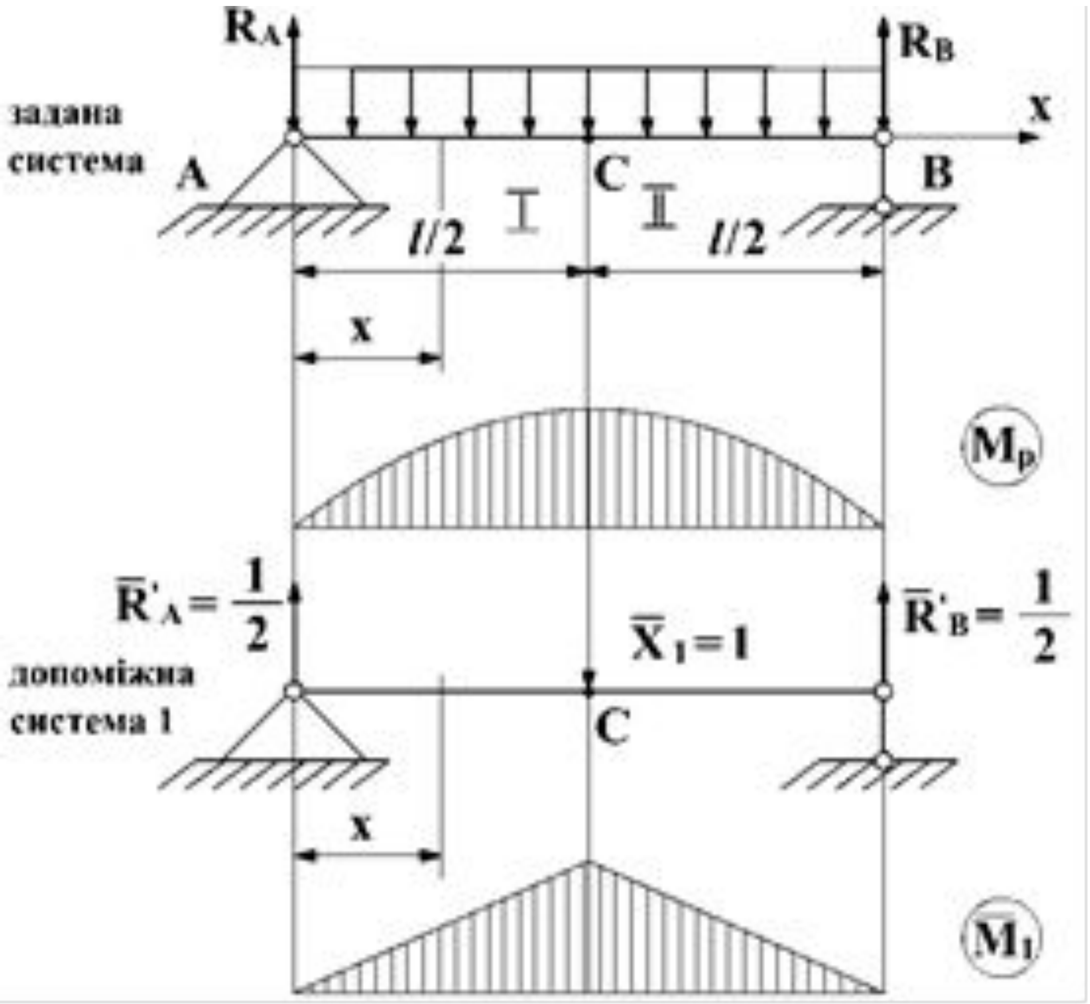


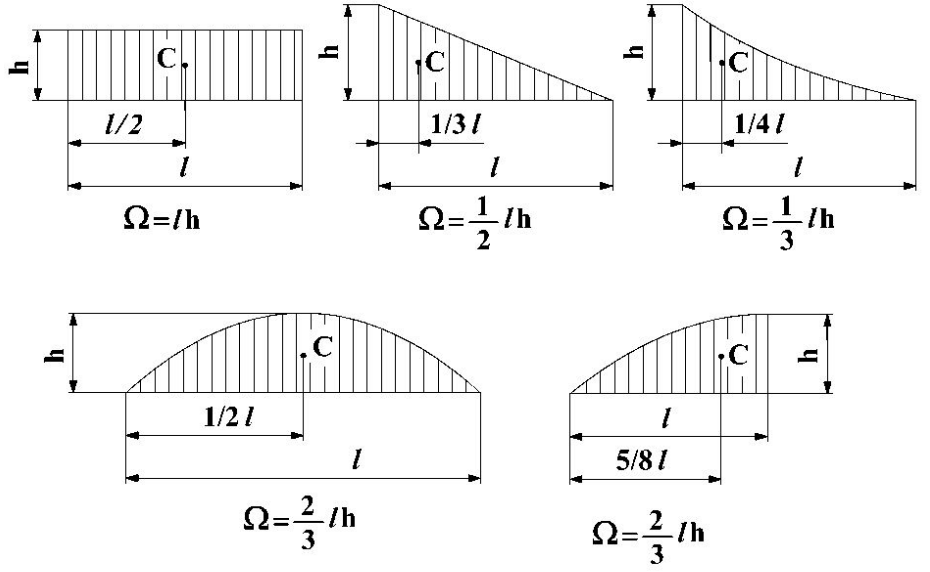
Визначити прогин посередині балки Δ_P

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega = \frac{1}{2}\frac{P\ell}{4}\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{P\ell^2}{16}$$

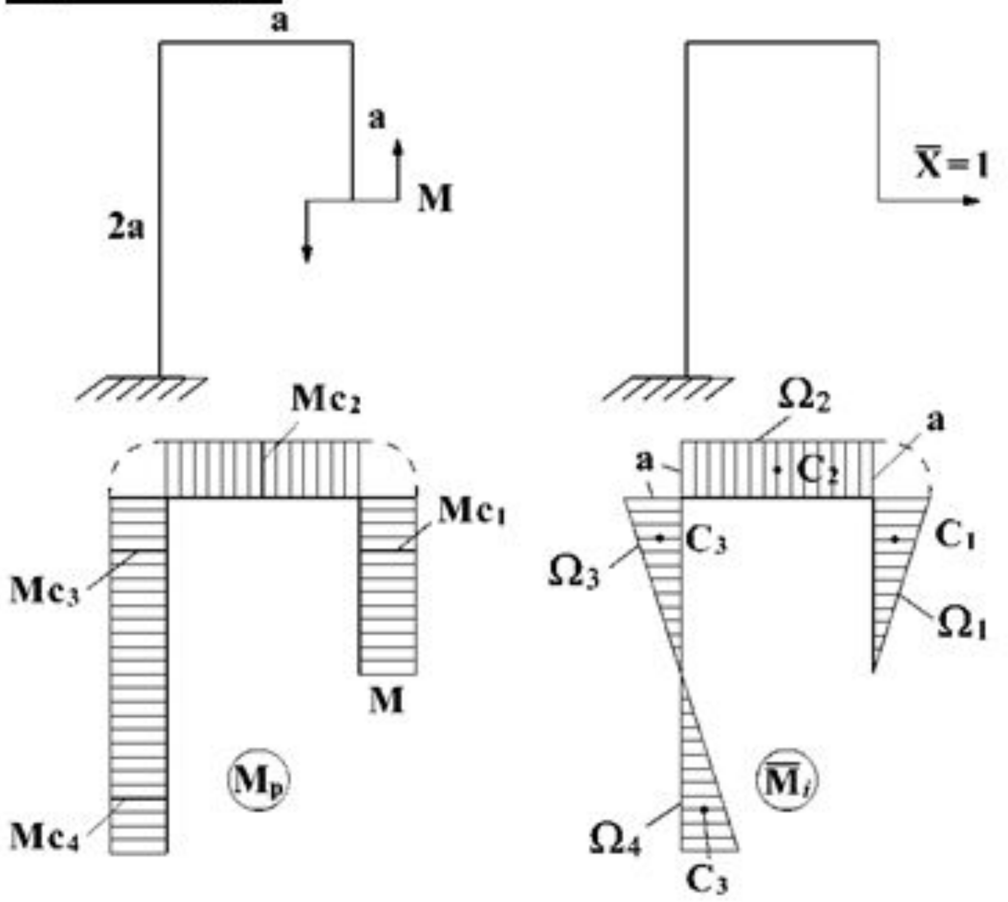
$$M_{C_1} = M_{C_2} = M_C = \frac{2}{3}\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{\ell}{6}$$

$$\Delta_P = 2\frac{\Omega M_C}{EI} = \frac{2}{EI}\frac{P\ell^2}{16}\cdot\frac{\ell}{6} = \frac{P\ell^3}{48EI}$$


R_A
R_B
x
задана
система
A
C
B
I
II
l/2
l/2
x
M_p
R̄'_A = 1/2
X̄_1 = 1
R̄'_B = 1/2
допоміжна
система 1
C
x
M̄_1


h
C
l/2
l
Ω = l h
1/3 l
Ω = 1/2 l h
1/4 l
Ω = 1/3 l h
1/2 l
Ω = 2/3 l h
5/8 l
Ω = 2/3 l h

Приклад 2



Визначити горизонтальне переміщення вільного кінця рами.

$$\Delta_{1P} = \frac{1}{EI}\left(\Omega_1 M_{C_1} + \Omega_2 M_{C_2} + \Omega_3 M_{C_3} + \Omega_4 M_{C_4}\right) =$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a^2 M + a^2 M + \frac{1}{2}a^2 M - \frac{1}{2}a^2 M\right) = \frac{3}{2}\frac{Ma^2}{EI}$$