РЯДЫ

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Числовым рядом (или просто рядом) называется бесконечная сумма вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

где - числа действительные или комплексные. Слагаемые $u_1, u_2, \ldots$, называются членами ряда, u_n - общий член ряда.

Сумма первых n членов числового ряда называется частичной суммой ряда и обозначается S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_n .$$

Если существует конечный предел

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n$$

последовательности частичных сумм числового ряда, то этот предел называется суммой ряда. Это значит, что

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k .$$

В этом случае говорят, что числовой ряд *сходится* и называют ряд *сходящимся*. Если же предел не существует или равен бесконечности, то ряд называют *расходящимся*.

►**Пример 1.** Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots.$$

Частичная сумма ряда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

Каждое слагаемое представим в виде суммы простейших дробей по формуле:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Тогда

$$S_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

В последнем выражении сокращаются все дроби кроме первой и последней. В итоге получим

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

Теперь можно вычислить

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Значит, ряд сходится и его сумма равна 1.

►**Пример 2.** Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}=1-1+1-1+\ldots$$

расходится, так как его последовательность частичных сумм

$$S_1=1,\ S_2=0,\ S_3=1,\ S_4=0,\ldots$$

не имеет предела.

СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} au_k = au_1 + au_2 + \ldots$, где a - число, также сходится и его сумма равна aS.

2. Если сходится ряд $\sum_{\kappa=1}^{\infty} u_\kappa$ и сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, то сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} v_k .$$

3. Если от ряда $\sum_{k=1}^{n} u_k$ отнять конечное число членов, то исходный ряд и полученный ряд $\sum_{k=m}^{\infty} u_k, 1 < m < \infty$, сходятся или расходятся одновременно.

Необходимый признак сходимости.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *сходится, то его общий член* u_k *стремится к нулю, т. е.* $\lim_{k\to\infty} u_k = 0$.

►**Пример 3.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n-2}{2n+4}$.

Так как

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{6n-2}{2n+4} = 3 \neq 0,$$

то ряд расходится.

◄

►**Пример 4.** Исследовать сходимость ряда $\left(1+\frac{1}{1}\right)^1+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$$

Следовательно, данный ряд расходится.

◄

►**Пример 5.** Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots.$$

Предел общего члена равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Составим частичную сумму S_n и оценим её.

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Получили, что $S_n>\sqrt{n}$, поэтому $\lim_{n\to\infty}S_n=\infty$.

Следовательно, ряд расходится.

◄

Гармонический ряд

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

называется гармоническим.

Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 .$$

Но ряд расходится.

РЯД ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

Ряд геометрической прогрессии имеет вид

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots,$$

где a, q - действительные числа, причем $a \neq 0$.

Ряд геометрической прогрессии используется при исследовании сходимости других рядов. Для частичной суммы ряда имеет место формула:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1.$$

Вычислим предел частичной суммы ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - a\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q}.$$

Если $|q|<1$, то $q^n \to 0$ при $n\to\infty$ и, значит,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Следовательно, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q|<1$.

Если $|q|>1$, то $q^n\to\infty$ при $q^n\to\infty, n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$. Значит, ряд геометрической прогрессии расходится при $|q|>1$.

Если $|q|=1$, то при $q=1$ ряд геометрической прогрессии принимает вид

$$a+a+\ldots+a+\ldots,$$

и так как $S_n = na$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\infty$, значит, ряд геометрической прогрессии расходится.

При $q=-1$ ряд геометрической прогрессии принимает вид

$$a-a+a-a+\ldots$$

и при $n=2k$ $S_n=0$, а при $n=2k+1$ $S_n=a$. Предел частичных сумм не существует и ряд геометрической прогрессии расходится.

Следовательно, ряд геометрической прогрессии сходится при $|q|<1$ и расходится при $|q|\ge 1$.

►**Пример 6.** Исследовать сходимость ряда $3^2+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots$.

Данный ряд – ряд геометрической прогрессии ($a=9, q=\frac{1}{3}$), он сходится, так как $q<1$, и его сумма равна $\frac{9}{1-\frac{1}{3}}=\frac{27}{2}$.

◄

ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ РЯДОВ

Рассмотрим знакоположительные ряды вида:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots (u_n > 0).$$

Признак сравнения

Пусть заданы два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *причем для всех* n *выполняется неравенство* $u_n \le v_n$.

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, *то сходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$; *если расходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, *то расходится и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Предельный признак сравнения

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *и существует конечный, отличный от нуля, предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A, (0 < A < \infty).$$

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся или расходятся одновременно.*

► **Пример 7.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$.

Для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, как ряд геометрической прогрессии $(q=\frac{1}{2})$, следовательно, сходится и исходный ряд по признаку сравнения.

◄

► **Пример 8.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Данный ряд будем сравнивать с гармоническим рядом (расходящимся). Так как для любого натурального n справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}>\frac{1}{n},$$

то по признаку сравнения исходный ряд расходится.

◄

►**Пример 9.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$.

Применим предельный признак сравнения. Исходный ряд сравним с гармоническим рядом. Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{5}\neq 0,$$

то исходный ряд расходится.

◄

Признак Д'Аламбера.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Тогда, если $q<1$, *то ряд сходится, если* $q>1$, *то ряд расходится. При* $q=1$ *ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся.*

Замечание. Признак Д'Аламбера рекомендуется применять, когда общий член ряда содержит выражение вида a^n или $n!$.

►**Пример 10.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{3^n}{n!}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Д'Аламбера ряд сходится.

◄

►**Пример 11.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$

Применим признак Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{3^n}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} n^2}{(n+1)^2 3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{(n+1)^2} = 3 > 1.$$

Ряд расходится.

Признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n > 0)$ и существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Тогда ряд сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. Если же $q = 1$, то вопрос о сходимости ряда остаётся не решённым.

►**Пример 12.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$.

По признаку Коши

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2 > 1.$$

Следовательно, ряд расходится.

◄

►**Пример 13.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3e} < 1.$$

Ряд сходится.

Интегральный признак Коши.

Пусть члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1;\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \ldots, u_n = f(n), \cdots$.

Тогда, если $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, если же $\int_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится.

►**Пример 14.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1} \frac{1}{1+n^2}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ удовлетворяет условию интегрального признака. Действительно, эта функция непрерывна и так как $f'(x) = -\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} < 0$, то монотонно убывает на промежутке $[1;\,\infty)$. Кроме того, $f(n) = \frac{1}{1+n^2}$. Следовательно, можно применить интегральный признак Коши, для этого вычислим

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty} arctgx\Big|_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(arctg\, a - arctg\, 1\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то исходный ряд также сходится.

◄

ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется знакопеременным, если он имеет бесконечное число положительных и бесконечное число отрицательных членов.

Например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ - знакопеременный.

Будем рассматривать также и ряд, из модулей членов исходного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. В этом случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся.*

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся.*

ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ

Знакочередующимся рядом называется ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n ,$$

где $u_n > 0, n \in N$.

Для знакочередующихся рядов имеет место достаточный признак сходимости.

Признак Лейбница.

Знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ *сходится, если последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е.* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$, *и общий член ряда стремится к нулю:* $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда удовлетворяет условию $0 < S < u_1$.

►**Пример 15.** Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

Абсолютные величины членов этого ряда убывают:

$$1>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{3^2}>\ldots>\frac{1}{n^2}>\ldots$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0\,.$$

Значит, ряд сходится .

Если учесть, что ряд из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится (докажите), то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ сходится абсолютно.

◄

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММЫ ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩЕГОСЯ РЯДА

Условие $0 < S < u_1$ дает удобную оценку погрешности, которая появляется при замене суммы ряда S его частичной суммой S_n.

$$S = u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots \approx S_n = u_1 - u_2 + u_n - \ldots + (-1)^{n-1} u_n,$$

$$S = S_n + r_n, r_n = (-1)^n (u_{n+1} - u_{n+2} + \ldots).$$

r_n-остаток, также ряд, сумма которого меньше первого члена, $r_n < u_{n+1}$.

►**Пример 16.** Вычислить приближённо сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$.

Данный ряд сходится абсолютно, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

сходится. Это можно доказать, применив признак Д'Аламбера.

Вычислим сумму первых четырех слагаемых и оценим её погрешность.

$$S_4 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{256} = \frac{5413}{6912} \approx 0{,}7831.$$

Погрешность $r_4 < \frac{1}{5^5} = \frac{1}{3125} = 0{,}00032$. Значит, $S \approx 0{,}783$ и все цифры верные.

◄

ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

В экономике бесконечные ряды и их суммы применяются в основном в теоретических исследованиях.

Предположим, что рассматривается задача о рыночной цене бессрочной облигации номиналом 1000$ и 3-% купоном. Это значит, что владелец этой облигации каждый год должен получать 30$. Необходимо определить истинную цену этой бесконечной последовательности платежей.

Любая валюта подвержена инфляции. Если инфляция составляет 2% в год, то 30$, которые получим через год, сейчас равны $\frac{30}{1,02}$. 30$, которые планируем получить через 2 года, сейчас равны $\frac{30}{(1,02)^2}$ и т. д. В итоге получаем, что бесконечный ряд платежей в 30$, которые будем получать каждый год, сейчас эквивалентны сумме ряда

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{30}{(1,02)^k}.$$

Применив формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$S=\frac{30}{1,02}\frac{1}{1-\frac{1}{1,02}}=\frac{30\cdot 1,02}{1,02\cdot 0,02}=1500.$$

СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Сходимость функциональных рядов

Рассмотрим бесконечную последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ldots,\ u_n(x),\ldots,$$

с областью определения D.

Определение. *Функциональным* рядом называют выражение

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),\ x\in D,$$

т.е. сумму бесконечной последовательности функций.

Для каждого значения $x_0 \in D$ функциональный ряд обращается в числовой ряд

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+u_3(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x_0),$$

который либо сходится, либо расходится. Если он сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* функционального ряда.

Множество всех точек сходимости называют *областью сходимости* G функционального ряда, а соответствующие значения сумм числовых рядов задают сумму функционального ряда $S(x)$.

Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится* в промежутке G к сумме $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать номер $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $n > N$ и всех $x \in G$ выполнялись неравенства

$$|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon .$$

Теорема (Признак Вейерштрасса). *Если для всех* $x \in G$ *, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство* $|u_n(x)| \le a_n$ *и положительный числовой ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *равномерно сходится в промежутке* G *.*

Функциональные ряды, для которых выполняются условия признака Вейерштрасса, еще называют *правильно сходящимися (*или *мажорируемыми) рядами*.

Так, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ равномерно сходится в R, поскольку $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, как известно, сходящийся.

Замечание. Нельзя забывать, что признак Вейерштрасса является только достаточным. Это означает, что могут существовать не мажорируемые на промежутке G ряды, которые, тем не менее, равномерно сходятся на этом промежутке.

Степенные ряды являются частным случаем *функциональных рядов.*

Определение. ***Степенным рядом*** *называется функциональный ряд вида* $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. (1)

Здесь $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – постоянные вещественные числа, называемые **коэффициентами** степенного ряда;

a – некоторое постоянное число,

x – переменная, принимающая значения из множества действительных чисел.

При $a = 0$ степенной ряд (1) принимает вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \quad (2)$$

Степенной ряд (1) называют *рядом по степеням разности* $(x-a)$, ряд (2) – *рядом по степеням.*

Если переменной x придать какое-либо значение, то степенной ряд (1) (или (2)) превращается в числовой ряд, который может сходиться или расходиться.

Определение 2. ***Областью сходимости степенного ряда*** называется *множество тех значений x, при которых степенной ряд сходится.*

Ряд (1) с помощью подстановки $(x-a)=x'$ приводится к более простому виду (2), поэтому будем рассматривать степенные ряды вида (2).

Теорема 1 (Теорема Абеля):

если степенной ряд (2) сходится при $x=x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|<|x_0|$; если же ряд (2) расходится при $x=x_0 \neq 0$, то он расходится при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству $|x|>|x_0|$.

Теорема 2:

область сходимости степенного ряда (2) совпадает с одним из следующих интервалов:

1) $(-R;R)$; 2) $[-R;R]$; 3) $(-R;R]$; 4) $[-R;R)$,

где R – некоторое неотрицательное действительное число или $+\infty$.

Определение. Число R называется ***радиусом сходимости***, интервал $(-R;R)$ – ***интервалом сходимости*** степенного ряда (2).

Если $R=+\infty$, то интервал сходимости представляет собой всю числовую ось $(-\infty;+\infty)$.

Если $R=0$, то интервал сходимости вырождается в точку $x=0$.

Замечание: если $(-R;R)$ – интервал сходимости для степенного ряда (2), то $(a-R;a+R)$ – интервал сходимости для степенного ряда (1).

Радиус сходимости R степенного ряда находится по одной из следующих формул:

формула Даламбера:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

формула Коши:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Если в формуле Коши $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 0$, то полагают $R = +\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, то полагают $R = 0$.

Пример 1. Найти радиус сходимости, интервал сходимости и область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n}$.

Решение

Найдем радиус сходимости данного ряда по формуле

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

В нашем случае

$$a_n=\frac{3^n}{n},\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+1}.$$

Тогда $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\cdot(n+1)}{n\cdot 3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1}{3}$.

Следовательно, интервал сходимости данного ряда имеет вид $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости.

При $x = \frac{1}{3}$ степенной ряд превращается в числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \ldots \, .$$

который расходится как гармонический ряд.

При $x = -\frac{1}{3}$ степенной ряд превращается в числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} + \ldots \, .$$

Это – знакочередующийся ряд, члены которого убывают по абсолютной величине и $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Следовательно, по признаку Лейбница этот числовой ряд сходится.

Таким образом, промежуток $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – область сходимости данного степенного ряда.

СВОЙСТВА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Степенной ряд (2) представляет собой функцию $f(x)$, определенную в интервале сходимости $(-R;R)$, т. е.

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = f(x).$$

Свойство 1. *Функция $f(x)$ является непрерывной на любом отрезке $[a;b]$, принадлежащем интервалу сходимости $(-R;R)$.*

Свойство 2. *Функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(-R;R)$, и ее производная $f'(x)$ может быть найдена почленным дифференцированием ряда (2), т. е.*

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_nx^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} =$$

$$= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \qquad \text{для всех } x \in (-R;R).$$

Свойство 3. *Неопределенный интеграл от функции* $f(x)$ *для всех* $x \in (-R; R)$ *может быть получен почленным интегрированием ряда (2), т. е.*

$$\int f(x)dx = C + \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = C + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int a_n x^n dx\right) = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1} =$$

$$= C + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots$$

для всех $x \in (-R; R)$.

РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть $f(x)$ – дифференцируемая бесконечное число раз функция в окрестности точки $x=a$, т. е. имеет производные любых порядков.

Определение. ***Рядом Тейлора*** *функции* $f(x)$ *в точке* $x=a$ *называется степенной ряд*

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (3)$$

В частном случае при $a=0$ ряд (3) называется ***рядом Маклорена***:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (4)$$

Теорема 3:

если в интервале $(a-R;a+R)$ *функция* $f(x)$ *имеет производные любого порядка и все они по абсолютной величине ограничены одним и тем же числом, т. е.* $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M(n=1,2,\ldots)$, *то ряд Тейлора этой функции сходится к* $f(x)$ *для любого x из этого интервала* $(a-R;a+R)$, *т. е. имеет место равенство*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n, \quad x\in(a-R;a+R).$$

Пример. Разложить многочлен $f(x)=-3+x-x^2+2x^3$ по степеням $(x-1)$. Здесь x_0=1 и $f(1)=-1$, $f'(1)=5$, $f''(1)=10$, $f'''(1)=12$. Получим разложение:

$$-3+x-x^2+2x^3=-1+5(x-1)+\frac{10}{2!}(x-1)^2+\frac{12}{3!}(x-1)^3 \quad .$$

РАЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

$f(x)=e^x$. Для этой функции $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=e^0=1, n=1,2,\ldots$.

По формуле (3) составим ряд Маклорена данной функции:

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (4)$$

Найдем радиус сходимости ряда (4) :

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n(n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=+\infty .$$

Следовательно, ряд (4) сходится при любом значении $x\in(-\infty;+\infty)$.

Все производные функции e^x на любом отрезке $[-a,a]$ ограничены, т. е.

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x\le M=e^a,\quad n=1,2,\ldots .$$

Поэтому, согласно теореме 3, имеет место разложение

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\quad x\in(-\infty;+\infty). \quad (5)$$

1) $e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{3}}{3!}+\ldots+\dfrac{x^{n}}{n!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty);$

2) $\mathrm{sh}x=x+\dfrac{x^{3}}{3!}+\dfrac{x^{5}}{5!}+\ldots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty);$

3) $\mathrm{ch}x=1+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{4}}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty);$

4) $\sin x=x-\dfrac{x^{3}}{3!}+\dfrac{x^{5}}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty);$

5) $\cos x=1-\dfrac{x^{2}}{2!}+\dfrac{x^{4}}{4!}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots \qquad (-\infty<x<\infty);$

6) $(1+x)^{m}=1+\dfrac{m}{1!}x+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^{2}+\dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^{3}+\ldots+$

$+\dfrac{m(m-1)\ldots(m-(n-1))}{n!}x^{n}+\ldots \qquad (-1<x<1);$

7) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots \qquad (-1<x<1);$

8) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \qquad (-1<x<1);$

9) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\ldots \qquad (-1<x<1);$

10) $\operatorname{arctg} x=x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\ldots \qquad (-1\le x\le 1);$

11) $\arcsin x=x+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\dfrac{x^7}{7}+\ldots=$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \qquad (-1<x<1).$$

Замечание. Готовые разложения можно использовать и для функций $\sin^2\alpha x$, $\cos^2\alpha x$, применяя формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha x=\frac{1-\cos 2\alpha x}{2}; \qquad \cos^2\alpha x=\frac{1+\cos 2\alpha x}{2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ К ЭЛЕМЕНТАРНЫМ ФУНКЦИЯМ

Формулы Тейлора и Маклорена с удаленным остаточным членом можно рассматривать как приближенные формулы для расчета значений функций в окрестности заданных точек. Погрешность такого приближения определяется величиной отбрасываемого остаточного члена. В частности, для формулы Маклорена с остаточным членом $R_n(x)$, имеет место следующая оценка $|R_n(x)| \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}$, где М – константа, ограничивающая по абсолютной величине (n +1) – ю производную функции в рассматриваемой окрестности.

Пример. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью 0,001.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + r_n(x), \text{ где } r_n(x) \le \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!},$$

М=max(e^x). Т.к. $x = \frac{1}{2}$ $(\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}})$, то М=$\sqrt{e}$, тогда $r_n(x) \le \frac{\sqrt{e}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} < 0{,}001$. Подсчет показывает, что уже n=4 обеспечивает требуемую точность, поэтому

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{24} = \frac{633}{384} = 1{,}6484.$$

Табличное значение $\sqrt{e}$ =1,6487.

Остаточный член в формуле Тейлора может быть использован в форме Пеано $r_n(x)=o(\left|x-x_0\right|^n)$, который удобно использовать при вычислении пределов.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}$.

Используем эквивалентность бесконечно малых величин при $x\to 0$.

При $x\to 0$ имеем $5x^2+7x^3\sim 5x^2$, поэтому при разложении числителя оставляем степени не выше второй, т.к. в знаменателе стоит x^2. Преобразуем числитель

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\cos^3 x\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(1-\cos x\right)\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\lim_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)\lim_{x\to 0}\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)=$$

$=3\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)$. По формуле Маклорена $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$, тогда $\left(1-\cos x\right)\sim\dfrac{x^2}{2!}$

при $x\to 0$, и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{5x^2+7x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3(1-\cos x)}{5x^2}=\dfrac{3}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x^2\,2!}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{2}=0{,}3$.

П р и м е р. Раскрыть неопределённость вида $\left(\frac{0}{0}\right)$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x-\operatorname{tg} 3x}$.

Р е ш е н и е. Сделаем преобразование в знаменателе и разложим $\sin 2x$, $\sin 3x$ и $\cos 3x$ в ряды, используя разложения основных элементарных функций:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x-\operatorname{tg} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin 2x)\cos 3x}{x\ \cos 3x-\sin 3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(2x-\frac{8x^3}{3!}+\cdots\right)}{x\left(1-\frac{9x^2}{4!}+\cdots\right)-\left(3x-\frac{27x^3}{3!}+\cdots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x+x^3\left(\frac{4}{3}+\cdots\right)}{-2x+x^3\left(\frac{33}{8}+\cdots\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left[-1+x^2\left(\frac{4}{3}+\cdots\right)\right]}{x\left[-2+x^2\left(\frac{33}{8}+\cdots\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1+x^2\left(\frac{4}{3}+\cdots\right)}{-2+x^2\left(\frac{33}{8}+\cdots\right)}=\frac{1}{2}.$$

П р и м е р. Найти решение уравнения $y' = y^2 + x^3$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1/2$.

Р е ш е н и е. Так как $x_0 = 0$, представим искомое решение в виде ряда Маклорена

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots.$$

Из начального условия имеем $y(0) = 1/2$, тогда из уравнения находим $y'(0) = y^2(0) + 0^3 = (1/2)^2 = 1/4$.

Дифференцируя заданное уравнение $y' = y^2 + x^3$, находим $y'' = 2yy' + 3x^2$, тогда

$$y''(0) = 2y(0)y'(0) + 3\cdot 0^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Снова дифференцируя уравнение, находим $y^{(3)} = 2(y')^2 + 2yy'' + 6x$.

Подставляя значения $x = 0$, $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 1/4$, $y''(0) = 1/4$, получаем $y^{(3)} = 3/8$, и так далее. Следовательно, решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{1!4}x + \frac{1}{2!4}x^2 + \frac{3}{3!8}x^3 + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \cdots.$$

Функция $f(x)$, определенная на всей числовой оси называется *периодической*, если существует такое число $T(T \neq 0)$, что при любом значении x выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$. Число T называется *периодом функции.*

Отметим некоторые с в о й с т в а этой функции:

1) Сумма, разность, произведение и частное периодических функций периода T есть периодическая функция периода T.
2) Если функция $f(x)$ период T, то функция $f(ax)$ имеет период $\frac{T}{a}$.
3) Если $f(x)$ - периодическая функция периода T, то равны любые два интеграла от этой функции, взятые по промежуткам длины T (при этом интеграл существует), т. е. при любых a и b справедливо равенство $\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_b^{b+T} f(x)dx$.

РЯДЫ ФУРЬЕ

Рядом Фурье для периодической с периодом 2π функции $f(x)$, интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$, называется тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условия представимости данной функции рядом Фурье и следствия данного разложения оговариваются следующей теоремой.

Достаточные признаки разложимости функции в ряд Фурье (**теорема Дирихле**):

1. Если функция $f(x)$ периода 2π имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ не более конечного числа точек разрыва и абсолютно интегрируема на нем, то эта функция разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке, в которой она дифференцируема.

2. Если функция $f(x)$ периода 2π удовлетворяет условию Дирихле на отрезке $[-\pi; \pi]$ (если этот отрезок может быть разбит на конечное число частей так, что внутри каждой части функция монотонна и ограничена), то эта функция разлагается в свой ряд Фурье в каждой точке непрерывности; если же x – точка разрыва, ряд Фурье сходится к числу

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(x)$ - четная функция с периодом $2L$, удовлетворяющая условию $f(-x) = f(x)$.

Тогда для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{k} f(x)dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx = 0$$, где $n=1,2,\ldots$

Таким образом, в ряде Фурье для четной функции отсутствуют члены с синусами, и ряд Фурье для четной функции с периодом $2L$ выглядит так:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi nx}{l}$$

Пусть теперь $f(x)$ - нечетная функция с периодом $2L$, удовлетворяющая условию $f(-x) = -f(x)$.

Тогда для коэффициентов ее ряда Фурье находим формулы:

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}\,dx \text{ , где } n=1,2,\ldots$$

Таким образом, в ряде Фурье для нечетной функции отсутствует свободный член и члены с косинусами, и ряд Фурье для нечетной функции с периодом $2L$ выглядит так:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi nx}{l}$$

Пример. Разложить функцию

$$f(x)=\begin{cases}0, & -2\le x\le 0,\\ x, & 0<x\le 2\end{cases}$$

в ряд Фурье на интервале (–2, 2).

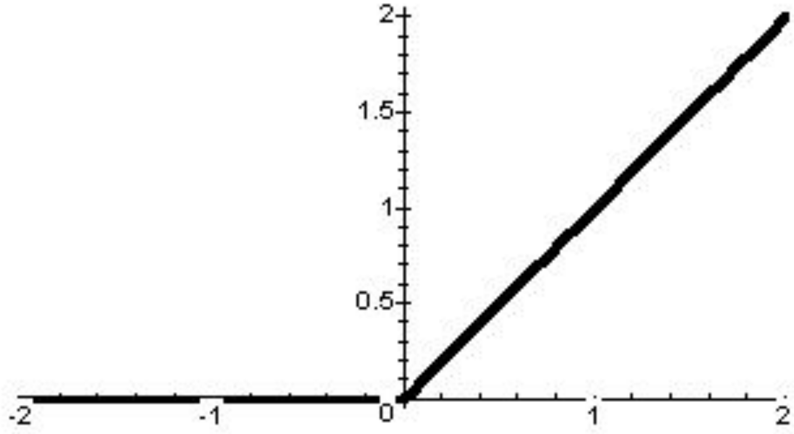

Рис.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{2}+b_n\sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Данная функция непрерывна на отрезке [–2, 2] и не имеет там экстремумов, следовательно, удовлетворяет условиям Дирихле. Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0=\frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}0\cdot dx+\int_{0}^{2}x\,dx\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2=1;$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx + \int_{0}^{2} x\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right] = \left\{\begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \cos\frac{n\pi x}{2}, v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx \right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2}{n^2\pi^2}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 =$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} 0, \quad n = 2k - \text{чётное} \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ -\frac{4}{n^2\pi^2} = -\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, \quad n = 2k-1 - \text{нечётное}; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx + \int_{0}^{2} x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}\cdot dx\right] = \left\{\begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin\frac{n\pi x}{2}, v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\cdot\frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}\cdot dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-2^2}{n\pi}\cdot\cos n\pi + \frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 \right) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом, разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

В соответствии с теоремой Дирихле, график суммы ряда Фурье для функции $f(x)$ имеет вид

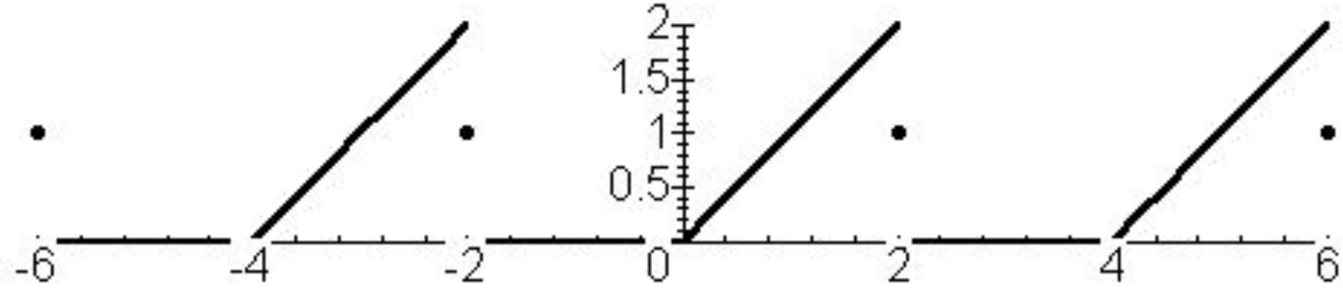

Рис.