Нечеткие множества

Основные понятия, функция принадлежности

Характеристическая функция

- Пусть U — так называемое универсальное множество, из элементов которого образованы все остальные множества, рассматриваемые в данном классе задач, например множество всех целых чисел, множество всех гладких функций и т.д. Характеристическая функция множества $A \subseteq U$ — это функция μ_A, значения которой указывают, является ли $x \in U$ элементом множества A:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Функция принадлежности

- ***Нечеткие множества*** есть естественное обобщение обычных множеств, когда мы отказываемся от бинарного характера этой функции и предполагаем, что она может принимать любые значения на отрезке [0,1].
- В теории *нечетких множеств* характеристическая функция называется ***функцией принадлежности***, а ее значение $\mu_A(x)$ — **степенью принадлежности** элемента x нечеткому множеству A.

Нечеткое множество

- Более строго, ***нечетким множеством*** А называется совокупность пар

$$A=\{\langle x, \mu A(x)\rangle \mid x \in U\},$$

  - где μA — функция принадлежности, т.е. $\mu A : U \rightarrow [0, 1]$.

Пример

U={a, b, c, d, e}

A={<a, 0>, <b, 0.1>, <c, 0.5>, <d, 0.9>, <e, 1> }

- a не принадлежит множеству A,
- b принадлежит ему в малой степени,
- c более или менее принадлежит,
- d принадлежит в значительной степени,
- e является элементом множества A.

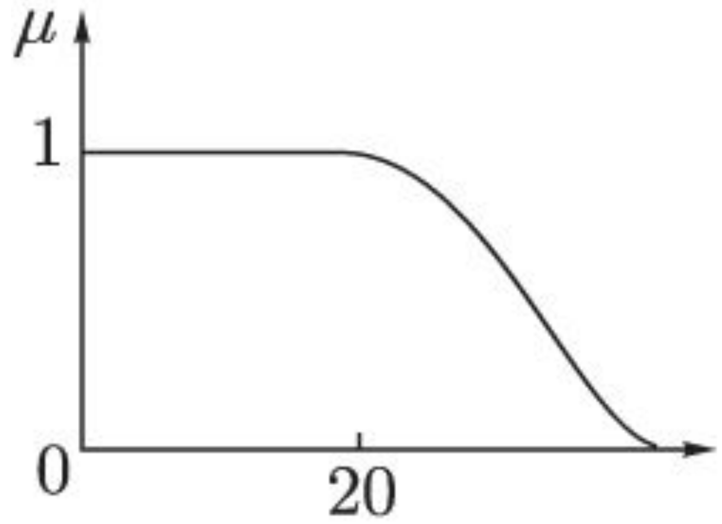
Лингвистическая переменная

- ***Лингвистическую переменную*** можно определить как переменную, значениями которой являются не числа, а слова или предложения естественного (или формального) языка.

Пример

- Лингвистическая переменная "возраст" может принимать следующие значения:
  - "очень молодой",
  - "молодой",
  - "среднего возраста",
  - "старый",
  - "очень старый"
  - и др.
- Ясно, что переменная "возраст" будет обычной переменной, если ее значения — точные числа; лингвистической она становится, будучи использованной в нечетких рассуждениях человека.

«молодой»



Терм-множество

- **Терм–множеством** (term set) называется множество всех возможных значений лингвистической переменной.
- **Термом** (term) называется любой элемент терм–множества. В теории нечетких множеств терм формализуется нечетким множеством с помощью функции принадлежности.

Пример

- Рассмотрим переменную “скорость автомобиля”, которая оценивается по шкале “низкая", "средняя", "высокая” и “очень высокая".
- В этом примере лингвистической переменной является “скорость автомобиля”, термами - лингвистические оценки “низкая", "средняя", "высокая” и “очень высокая”, которые и составляют терм–множество.

Строгое определение

- *Лингвистическая переменная* задается пятеркой (x, T, U, G, M), где
  - x - имя переменной;
  - T - терм-множество, каждый элемент которого (терм) представляется как нечеткое множество на универсальном множестве U;
  - G - синтаксические правила, часто в виде грамматики, порождающие название термов;
  - M - семантические правила, задающие функции принадлежности нечетких термов, порожденных синтаксическими правилами G.

Пример

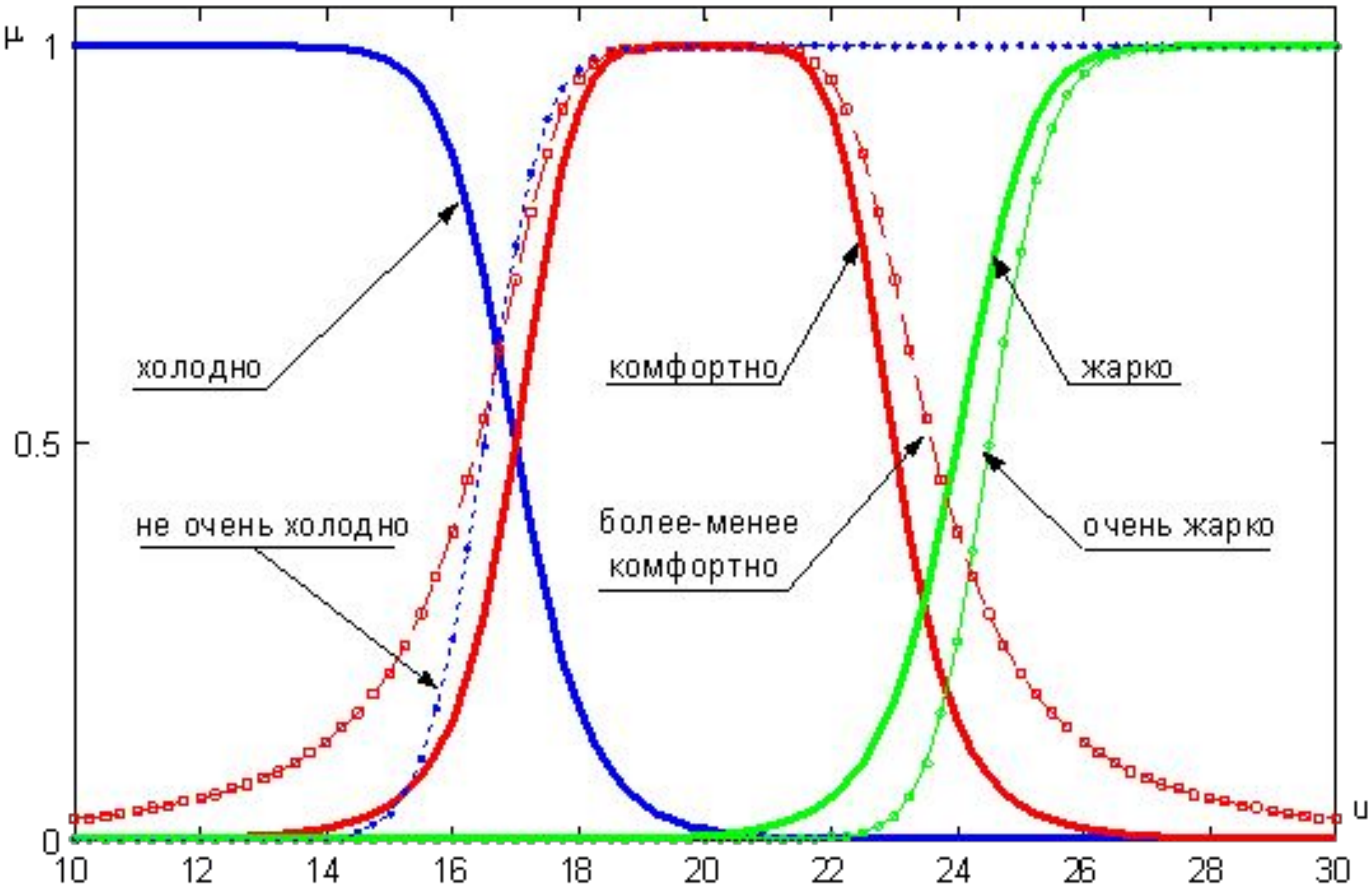
- Рассмотрим лингвистическую переменную с именем x= "температура в комнате". Тогда оставшуюся четверку (T, U, G, M) можно определить так:
  - универсальное множество - U=[5, 35];
  - терм-множество - T={"холодно", "комфортно", "жарко"} с такими функциями принадлежностями ($u \in U$):

$$\mu_{\text{"холодно"}}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-10}{7}\right)^{12}} \quad \mu_{\text{"комфортно"}}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-20}{3}\right)^{6}} \quad \mu_{\text{"жарко"}}(u) = \frac{1}{1+\left(\frac{u-30}{6}\right)^{10}}$$

Пример

- синтаксические правила G, порождающее новые термы с использованием квантификаторов "не", "очень" и "более-менее";
- семантические правила M, в виде таблицы

Квантификатор	Функция принадлежности ($u \in U$)
не t	$1-\mu_t(u)$
очень t	$(\mu_t(u))^2$
более-менее t	$\sqrt{\mu_t(u)}$



μ
1
0.5
0
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
u
холодно
не очень холодно
комфортно
более-менее комфортно
жарко
очень жарко

Носитель и высота

- **Носителем (суппортом)** нечеткого множества А называется четкое множество supp A таких точек в U, для которых величина μA(x) положительна, т.е.
  - supp A={x| $\mu_A(x)$ >0}.
- **Высотой** нечеткого множества А называется верхняя граница его функции принадлежности.

- Для дискретного универсального множества U супремум становится максимумом, а значит высотой нечеткого множества будет максимум степеней принадлежности его элементов. $\sup_U \mu_A(x)$

Нормальное нечеткое множество

- Нечеткое множество А называется **нормальным**, если

$$\sup_{U} \mu_A(x) = 1$$

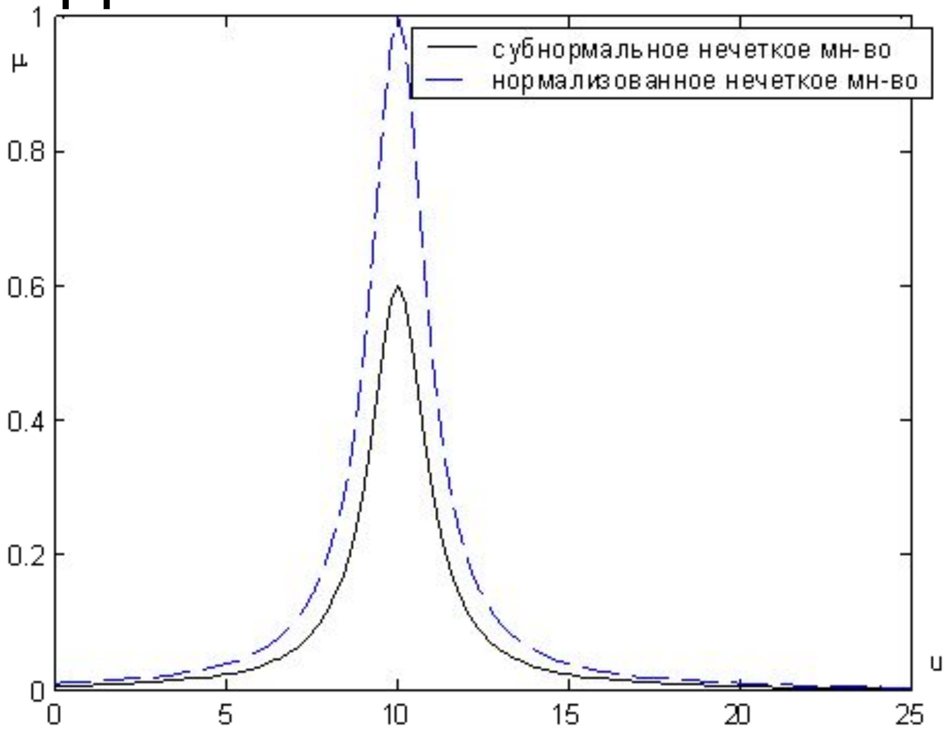
- В противном случае оно называется **субнормальным**.
- Нечеткое множество называется **пустым**, если $\forall x \in U (\mu A(x) = 0)$.

- Непустое субнормальное нечеткое множество можно привести к нормальному (нормализовать) по формуле

$$\mu'_A(x) = \frac{\mu_A(x)}{\sup\limits_U \mu_A(x)}.$$

• Нормализация нечеткого множества Ã с функцией принадлежности

$$\mu_{A'}(u) = \frac{0.6}{1 + (10 - u)^2}$$



Ядро

- **Ядром** нечеткого множества Ã называется четкое подмножество универсального множества U, элементы которого имеют степени принадлежности равные единице.

$$core(A)=\{x|\ \mu_A(x)=0\}$$

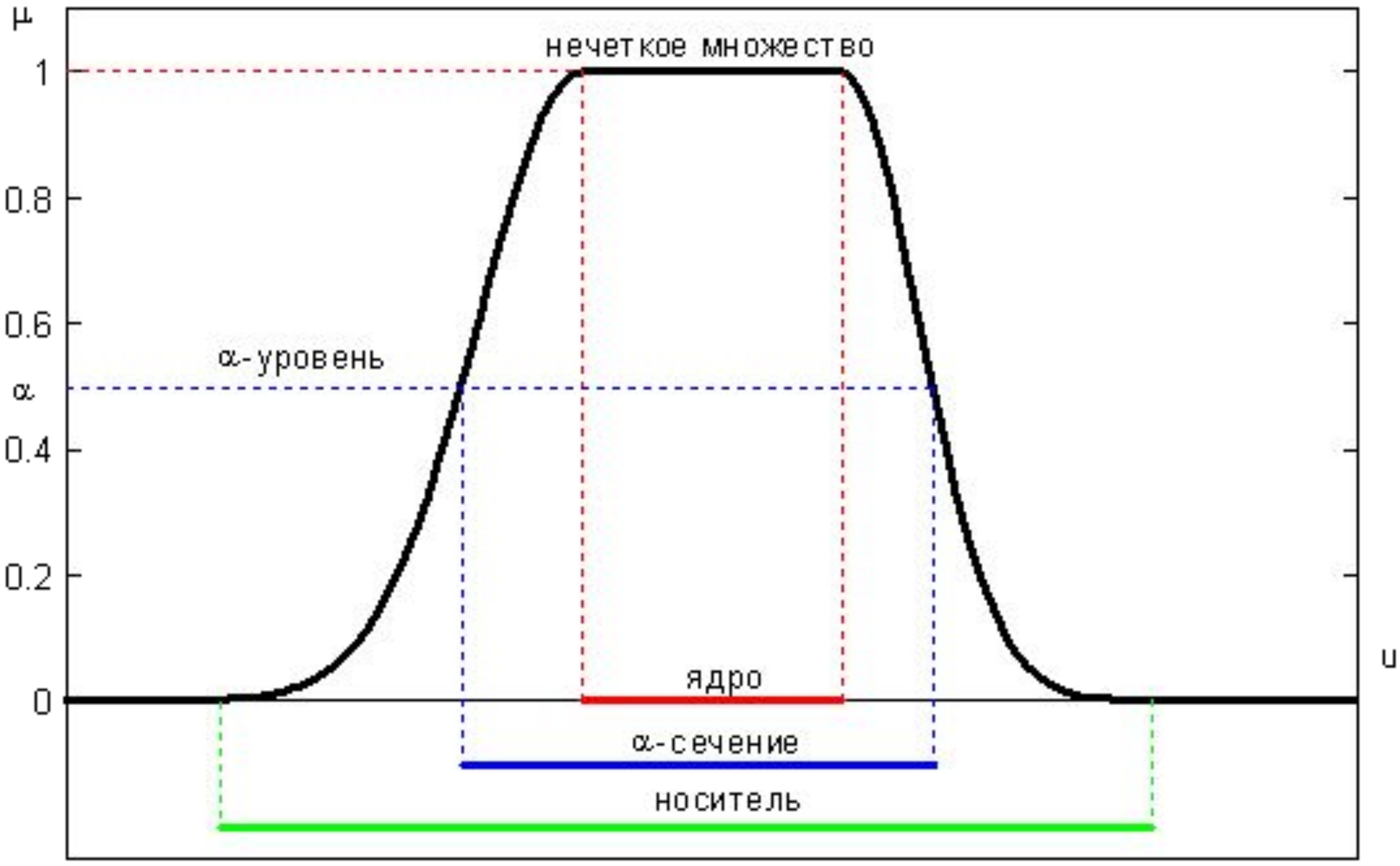
- Ядро субнормального нечеткого множества пустое.

Срез

- **Множеством уровня** α (α-**срезом, α-сечением**) нечеткого множества A называется четкое подмножество универсального множества U, определяемое по формуле

$$A_\alpha=\{x|\ \mu_A(x)\geq\alpha\},\ \alpha\in[0,1].$$

Пример


μ
нечеткое множество
1
0.8
0.6
α-уровень
α
0.4
0.2
0
u
ядро
α-сечение
носитель

Точка перехода

- Множество строгого уровня определяется в виде $A_\alpha=\{x|\ \mu_A(x)>\alpha\}$. В частности, носителем нечеткого множества является множество элементов, для которых $\mu_A(x)>0$.
- **Точка перехода** нечеткого множества A — это такой элемент $x \in U$, для которого $\mu_A(x)=0.5$.

Четкое множество

- **Четкое множество** A*, ближайшее к нечеткому множеству A, определяется следующим образом:

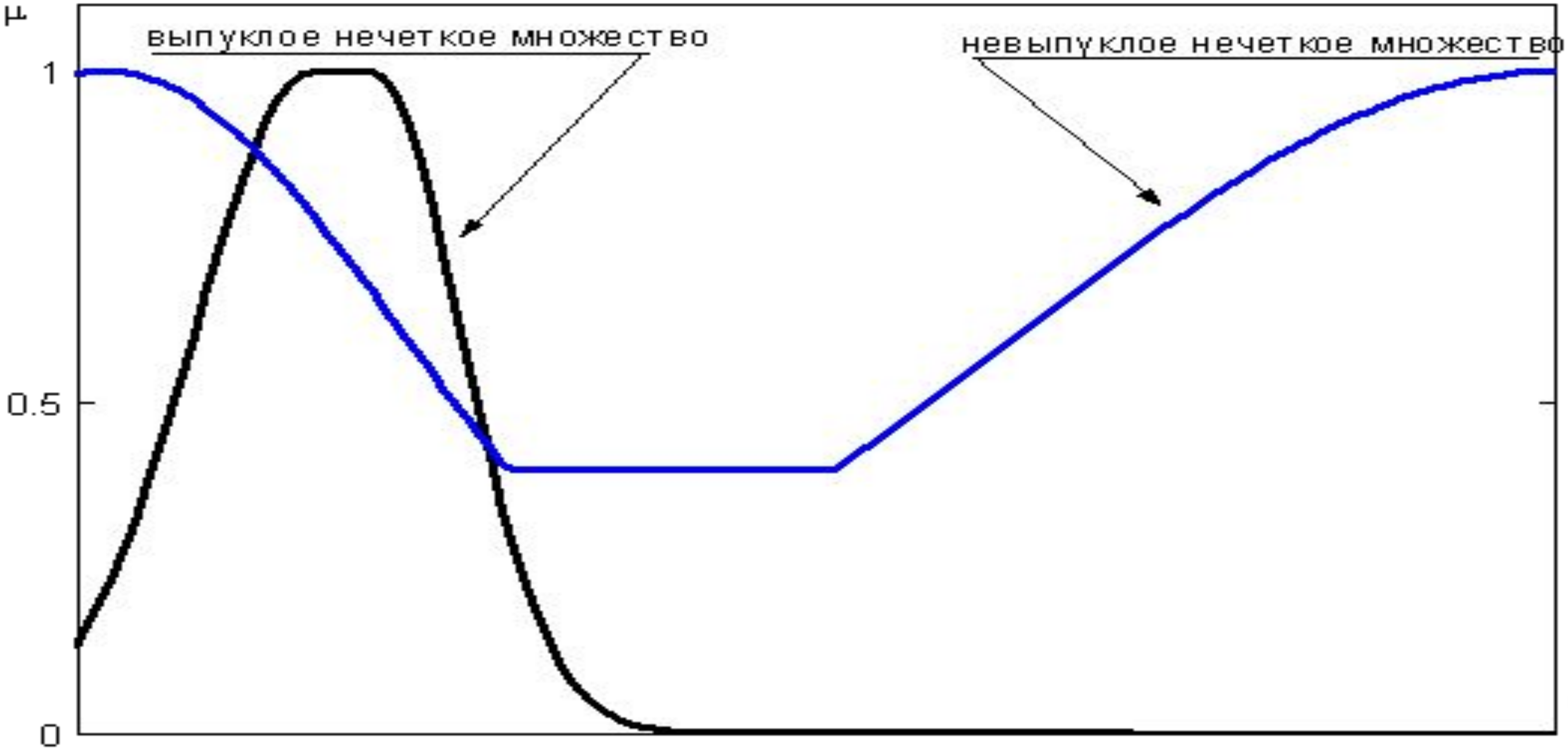
$$\mu_{A*}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_A(x) < 0,5; \\ 1, & \text{если } \mu_A(x) > 0,5; \\ 0 \text{ или } 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выпуклое множество

- Нечеткое множество A в пространстве U=Rn называется **выпуклым** нечетким множеством тогда и только тогда, если его функция принадлежности выпукла, т.е. для каждой пары точек x и y из U функция принадлежности удовлетворяет неравенству

  $\mu_A(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$, для любого $\lambda \in [0, 1]$

Пример


μ
выпуклое нечеткое множество
невыпуклое нечеткое множество
1
0.5
0
u

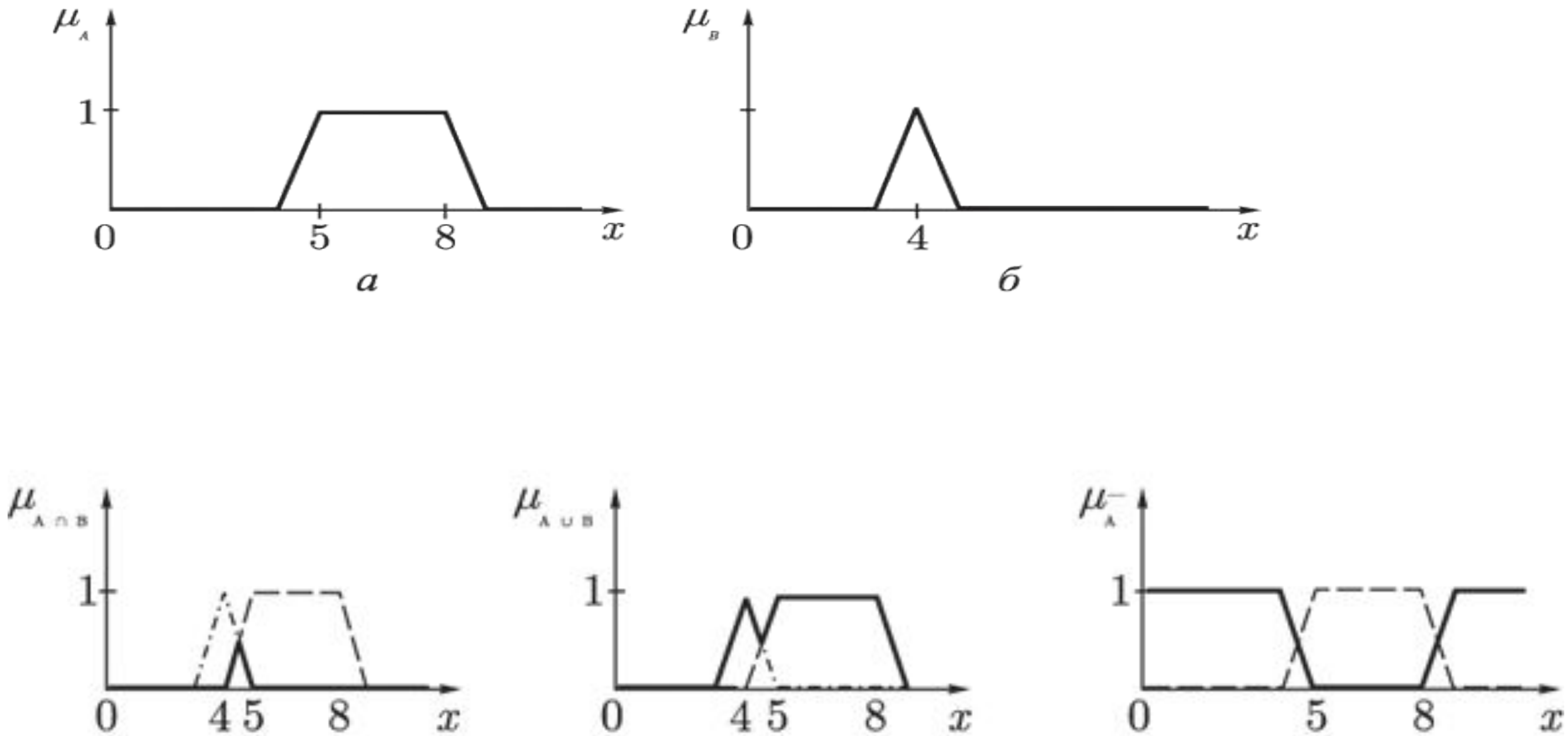
Операции

- Объединение
  - $\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Пересечение
  - $\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$
- Дополнение

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

$$A \cap \bar{A} \neq \varnothing, \ A \cup \bar{A} \neq U$$

Пример

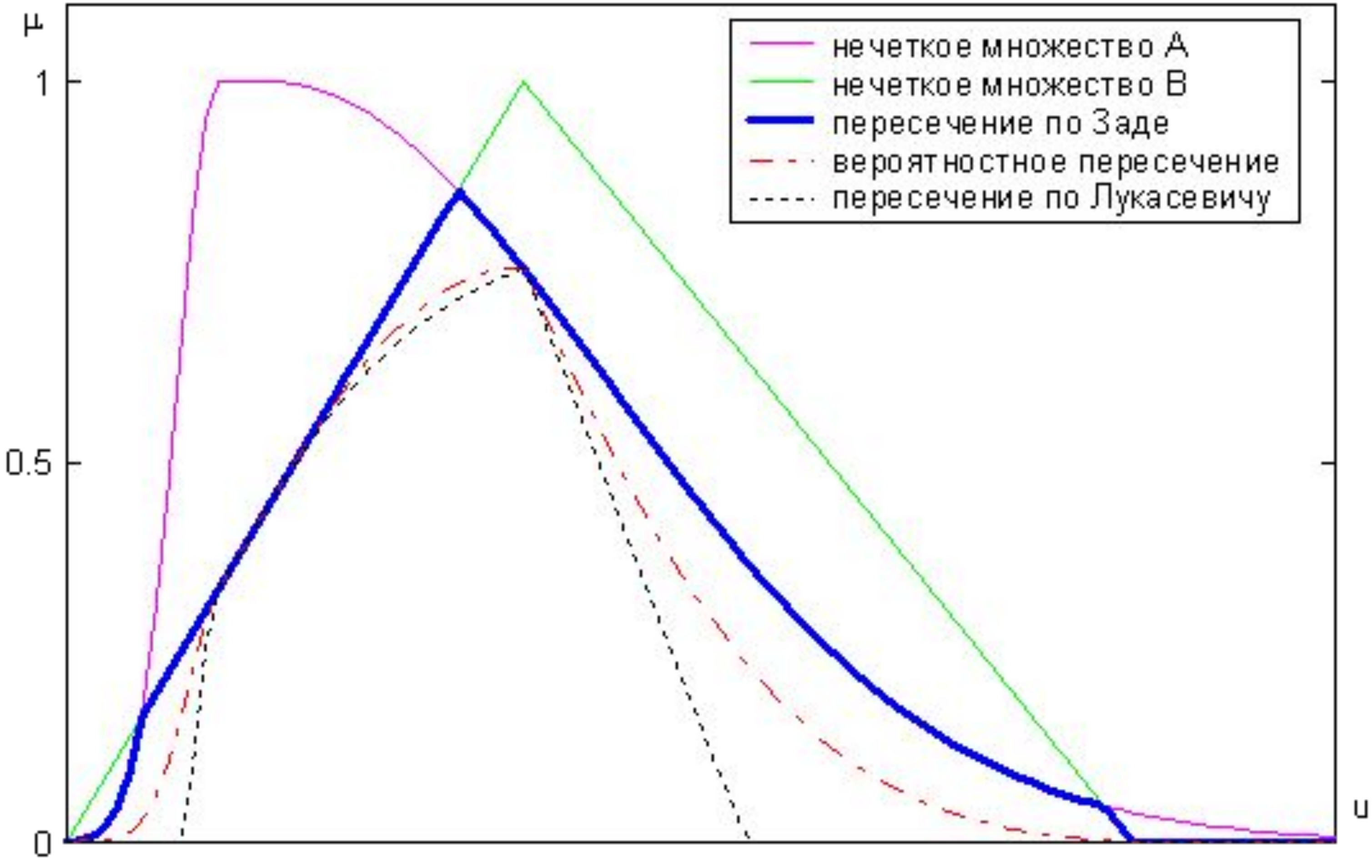


μ_A
1
0
5
8
x
a
μ_B
0
4
x
б
$\mu_{A\cap B}$
1
0
4 5
8
x
$\mu_{A\cup B}$
1
0
4 5
8
x
$\mu_{\bar{A}}$
1
0
5
8
x

Треугольная норма

- *Треугольной нормой (t-нормой)* называется бинарная операция T на единичном интервале $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых a, b, $c \in [0,1]$:
  - T(a,1)=a (граничное условие);
  - T(a,b)≤T(a,c) если b≤c (монотонность);
  - T(a,b)=T(b,a) (коммутативность);
  - T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c) (ассоциативность).
- Наиболее часто используются такие t-нормы: пересечение по Заде – T(a,b)=min(a,b); вероятностное пересечение – T(a,b)=ab; пересечение по Лукасевичу – T(a,b)=max(a+b-1,0).

Пересечение



Треугольная конорма

- *Треугольной конормой (s-нормой)* называется бинарная операция S на единичном интервале $[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, удовлетворяющая следующим аксиомам для любых a, b, $c\in[0,1]$:
  - S(a,0)=a (граничное условие);
  - S(a,b)≤S(a,c) если b≤c (монотонность);
  - S(a,b)=S(b,a) (коммутативность);
  - S(a,S(b,c))=S(S(a,b),c) (ассоциативность).
- Наиболее часто используются такие s-нормы: объединение по Заде - S(a,b)=max(a,b);; вероятностное объединение - S(a,b)=a+b–ab; объединение по Лукасевичу - S(a,b)=min(a+b,1).

Объединение