Тема: «Исследование функций с помощью производных»

Приложения производной

- Понятие производной имеет широкие приложения.
- Важное приложение производной − задачи на нахождение экстремальных (наибольших и наименьших) значений.
- Оно основано на следующем факте, установленном Пьером Ферма:
- **если функция y=f(x) принимает в некоторой точке** $x = x_0$ **экстремальное значение и существует производная** $y'(x_0)$ **в этой точке, то**
- $y'(x_0) = 0$

Экстремумы функции, их необходимый и достаточный признаки

- **Точка экстремума функции** – это точка области определения функции, в которой значение функции принимает минимальное или максимальное значение. Значения функции в этих точках называются **экстремумами** (минимумом и максимумом) функции.

Критические точки

- **Значение аргумента $x = x_0$**, при котором производная обращается в нуль или не существует, называется **критическим**.
- Однако не во всякой критической точке функция имеет экстремум. Существует ряд достаточных условий наличия экстремума в точке $x = x_0$. Сформулируем два из них.

Первый достаточный признак существования экстремума

- Если производная функции при переходе слева направо через критическую точку $\mathbf{x = x_0}$ меняет знак с «−» на «+», то $\mathbf{x = x_0}$ – точка **минимума**, а при перемене знака с «+» на «−» $\mathbf{x = x_0}$ – точка **максимума**.

Второй достаточный признак существования экстремума

- Критическая точка $\mathbf{x_0}$ является точкой экстремума функции $f(x)$, если вторая производная функции в этой точке **не равна нулю** ($f''(x) \neq 0$); причём, если вторая производная **больше** нуля ($f''(x) > 0$), то она является **точкой максимума**, а если вторая производная **меньше** нуля ($f''(x) < 0$), то **точкой минимума.**

Признаки возрастания и убывания функции

- **Теорема 1 (достаточный признак возрастания).** Если во всех точках некоторого промежутка производная функции **больше нуля** ($f'(x) > 0$), то функция $f(x)$ **возрастает** в этом промежутке.
- **Теорема 2 (достаточный признак убывания).** Если во всех точках некоторого промежутка производная функции **меньше нуля** ($f'(x) < 0$), то функция $f(x)$ **убывает** на этом промежутке.

Схема исследование функций и построения их графиков

1. Найти область определения функции **D(f).**
2. Установить четность и периодичность функции.
3. Установить поведение функции на концах промежутков области определения.
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции, исследуя знак ее первой производной.
5. Найти точки экстремума (с помощью первой или второй производных, а также путем выявления точек, в которых функция не имеет производной или имеет бесконечную производную).

Схема исследование функций и построения их графиков

6. Вычислить значения экстремумов (для чего надо вычислить значения функции в точках экстремума).
7. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции (путем исследования знака второй производной: график функции выпуклый для тех значений *x*, при которых $f''(x) < 0$, и вогнутый, для тех *x*, при которых $f''(x) > 0$. Найти точки перегиба **A(*x*$_0$,f(*x*$_0$))** – точки, при переходе через которые меняется направление выпуклости-вогнутости (при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$ вторая производная меняет знак). Более конкретно.

Точки перегиба

- Если в точке $\boldsymbol{x_0}$ функция $f(x)$ имеет первую **производную**, а вторая производная в этой точке равна нулю или не существует и, кроме того, при переходе через точку $\boldsymbol{x_0}$ меняет знак, то точка ($\boldsymbol{x_0}$, $\mathbf{f}(\boldsymbol{x_0})$) является точкой **перегиба** графика функции y = f(x).

Схема исследование функций и построения их графиков

8. Найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции. ***Асимптотами*** графика функции называются прямые, к которым при неограниченном удалении от начала координат ($x \to \pm\infty,\ y \to \pm\infty$) приближается график функции, но их не пересекает.

Если функция не определена при **x = a**, то прямая **x = a** является **вертикальной** асимптотой.

Схема исследование функций и построения их графиков

- Для определения **наклонной** асимптоты **y=kx+b** (в том числе и горизонтальной) при x⟶+∞ или x⟶-∞ числа **k** и **b** находят по формулам:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$$

или

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)$$

9. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями.
10. Построить график функции.

Пример

- Исследовать функцию $f(x)=\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2}$ и построить ее график.
- **<u>Решение.</u>**

  1. Данная функция определена на всем множестве действительных чисел за исключением точки *x* = 0, таким образом, **D(f) = (–∞, 0) ∪ (0, +∞).**

  2. Функция не является четной или нечетной, т. к.

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2+5(-x)-3}{(-x)^2}=\frac{2x^2-5x-3}{x^2}\neq f(x)\neq -f(x)$$

Пример

3. Установим, как ведет себя функция при x→+∞, x→-∞, x→0:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+5x-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot 0^2+5\cdot 0-3}{0^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-3}{0}=-\infty$$

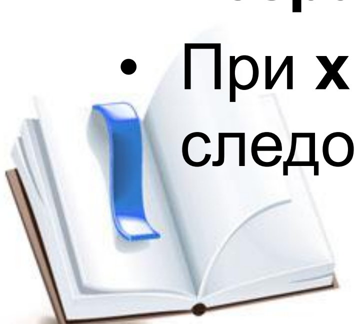
4. Находим производную заданной функции:

$$f'(x)=\left(\frac{2x^2+5x-3}{x^2}\right)'=\frac{(2x^2+5x-3)'\cdot x^2-(2x^2+5x-3)\cdot(x^2)'}{x^4}=$$

$$=\frac{(4x+5)\cdot x^2-2x\cdot(2x^2+5x-3)}{x^4}=\frac{-5x+6}{x^3}$$

Пример

- Производная обращается в нуль при **x=6/5**. Точка **x=6/5** − **критическая** точка.
- Производная не существует при **x=0**, однако, **x=0** критической точкой не является, т. к. не принадлежит области определения.
- На промежутке **x∈(0; 6/5)** производная данной функции **положительна**, значит, функция на этом промежутке **возрастает**.
- При **x∈(-∞; 0)∪(6/5; +∞)** производная **отрицательна**, следовательно, при этих значениях *x* функция **убывает**.



Пример

$$f'(x)=\frac{-5x+6}{x^3}$$

5. Точка **x=6/5** – точка **максимума**, так как при переходе слева направо через нее производная меняет знак с «+» на «–».

6. **Максимальное** значение функции равно:

$$f_{\max}=f(\frac{6}{5})=f(1{,}2)=\frac{2\cdot(1{,}2)^2+5\cdot 1{,}2-3}{(1{,}2)^2}\approx 4{,}08$$

7. Находим вторую производную данной функции:

$$f''(x)=\left(\frac{-5x+6}{x^3}\right)'=\frac{(-5x+6)'\cdot x^3-(x^3)'\cdot(-5x+6)}{x^6}=$$

$$=\frac{-5x^3-3x^2\cdot(-5x+6)}{x^6}=\frac{10x^3-18x^2}{x^6}=\frac{10x-18}{x^4}$$

Пример

- Вторая производная при **x∈(-∞; 0)∪(0; 1,8) отрицательна**, следовательно график функции будет **выпуклым** на этом промежутке.
- При **x∈(1,8; +∞)** график функции будет вогнутым, т. к. на этом промежутке вторая производная **положительна**.
- В точке с абсциссой **x=1,8** график заданной функции имеет перегиб. Найдем значение функции при **x=1,8**; получим:

$$f(1{,}8) = \frac{2\cdot(1{,}8)^2 + 5\cdot 1{,}8 - 3}{(1{,}8)^2} \approx 3{,}85$$

- Точка перегиба имеет координаты (1,8; 3,85).

Пример

8. При **x = 0** функция не определена. Таким образом, прямая **x = 0** является для графика **вертикальной** асимптотой.

Уравнение **наклонной** асимптоты будем искать в виде **y=kx+b.**

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{2x^2+5x-3}{x^2}-0\cdot x)=2$$

Пример

- Таким образом, при **x→+∞** наклонной асимптотой будет прямая **y = 2** (уравнение **горизонтальной** прямой).
- Несложно установить, что эта же прямая будет асимптотой и при **x→-∞**.

9. График функции **не пересекает** ось **O*y***. Точки пересечения графика с осью **O*x*** находим, решая уравнение:

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2}=0$$

- Получаем $\mathbf{x_1 = -3;\ x_2 = 0,5}$.

Пример

- График функции:

$$f(x)=\frac{2x^2+5x-3}{x^2}$$