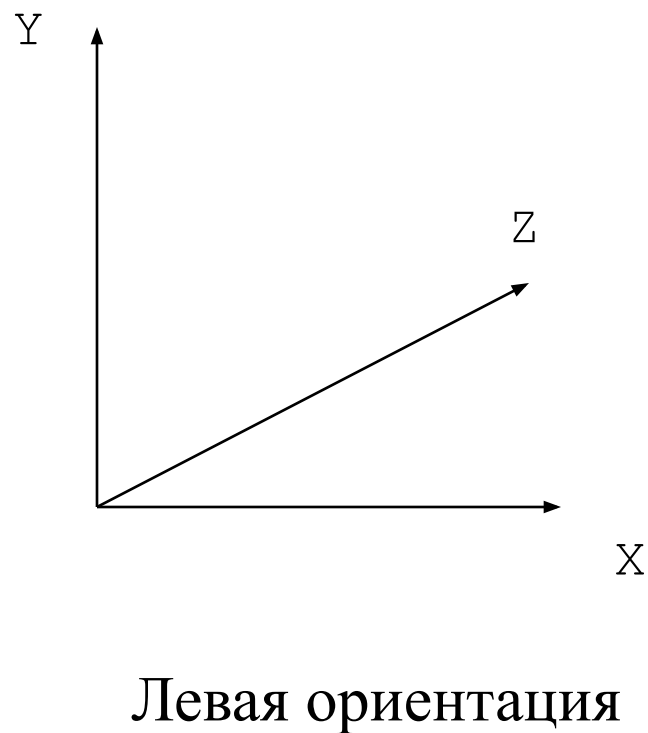


Поверхности 2-го порядка

3D пространство

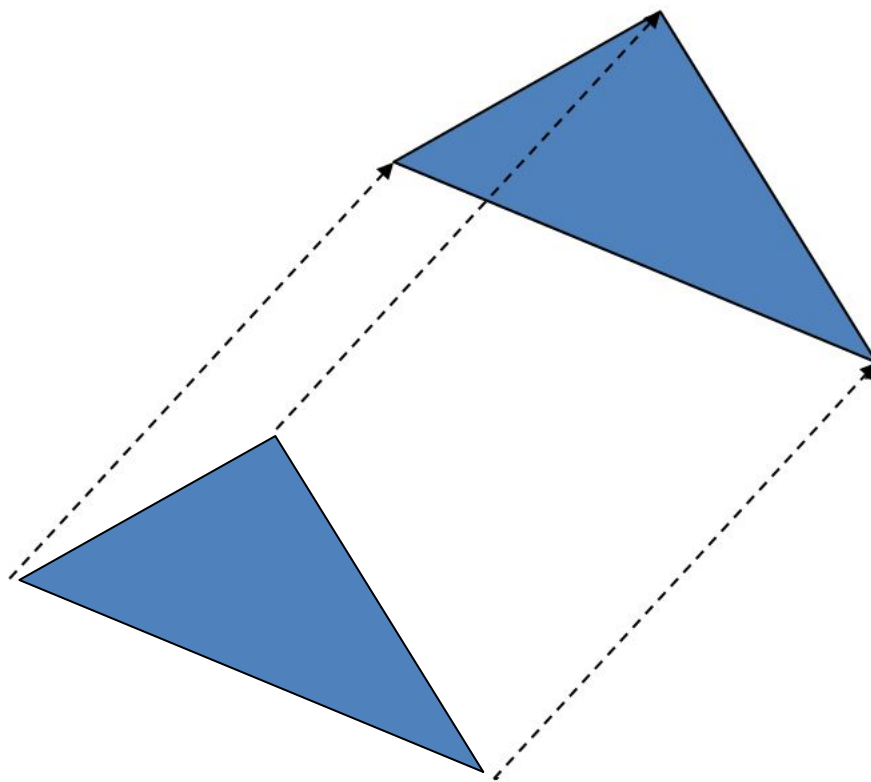


Параллельный перенос

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

$$z' = z + c$$



Параллельный перенос

$$x' = x + a$$

$$y' = y + b$$

$$z' = z + c$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

3D поворот

Рассматривается поворот осей координат вокруг начала координат.

В матричном представлении: всякая ортогональная 3×3 матрица задает поворот:

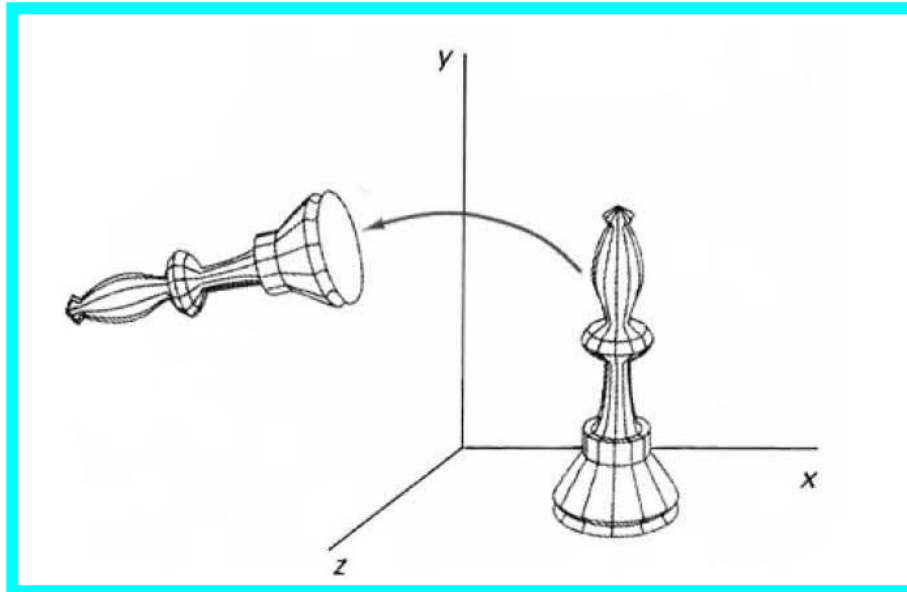
- Строки и столбцы образуют ортонормированную систему
- Определитель равен $+1$ или -1
- Обратная матрица совпадает с транспонированной.

3D поворот

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & r_{xz} & 0 \\ r_{yx} & r_{yy} & r_{yz} & 0 \\ r_{zx} & r_{zy} & r_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

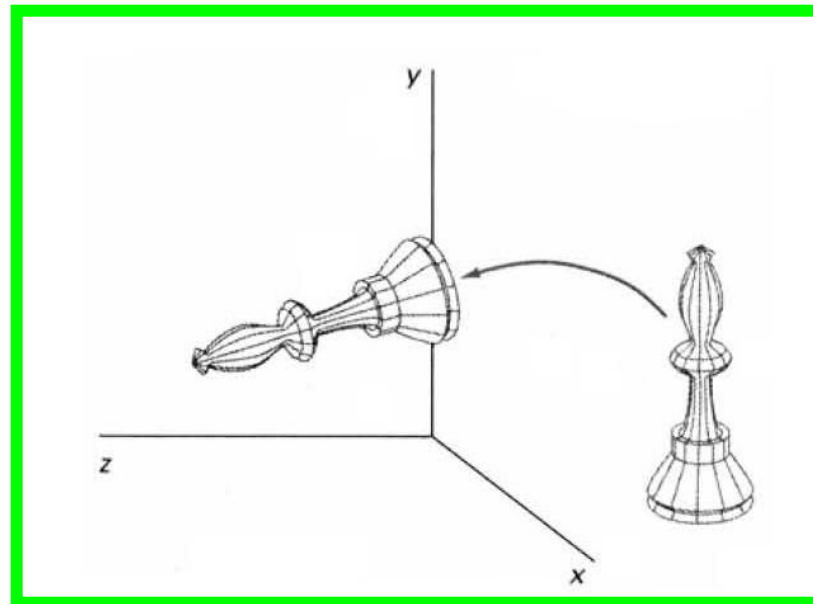
Поворот вокруг оси Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



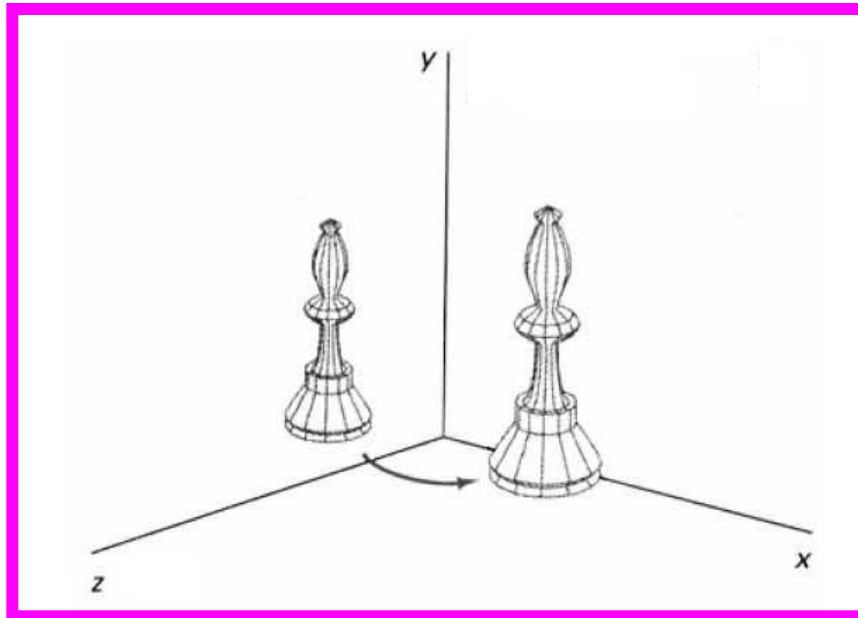
Поворот вокруг оси X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Поворот вокруг оси Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Уравнение поверхности 2-го порядка

Уравнение поверхности 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0,$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \quad \text{главная(квадратичная) часть}$$

$$2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c \quad \text{линейная часть}$$

Основная задача состоит в умении по уравнению определить тип поверхности, привести само уравнение к каноническому виду и построить поверхность в системе координат. Сначала произведем ***поворот системы координат.***

Составим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица симметрическая, то существует ортогональное преобразование (поворот), приводящее главную часть к главным осям, так что преобразованное уравнение имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + b'_1x' + b'_2y' + b'_3z' + c = 0.$$

Хотя бы один из коэффициентов при квадратах отличен от нуля, иначе матрица A была бы нулевой. Рассмотрим три случая.

1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0$$

Выделим полные квадраты

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + \lambda_3 \left(z + \frac{b_3}{\lambda_3}\right)^2 + c' = 0$$

выполним параллельный перенос

$$x' = x + \frac{b_1}{\lambda_1}$$

получим

$$y' = y + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + \lambda_3 (z')^2 + c' = 0$$

$$z' = z + \frac{b_3}{\lambda_3}$$

1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

1.1. Если знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ одинаковы и $c=0$, преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 0$$

Получим каноническое уравнение точки (вырожденный эллипсоид)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

1.2. Если знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ и c одинаковы, то действительных решений нет, преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{c}{\lambda_2}} + \frac{z^2}{\frac{c}{\lambda_3}} = -1$$

Получим каноническое уравнение **мнимого эллипсоида**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

1.3. Если знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, с одной стороны, и c различны, то действительных решений нет, преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} + \frac{z^2}{-\frac{c}{\lambda_3}} = 1$$

Получим каноническое уравнение **действительного эллипсоида**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

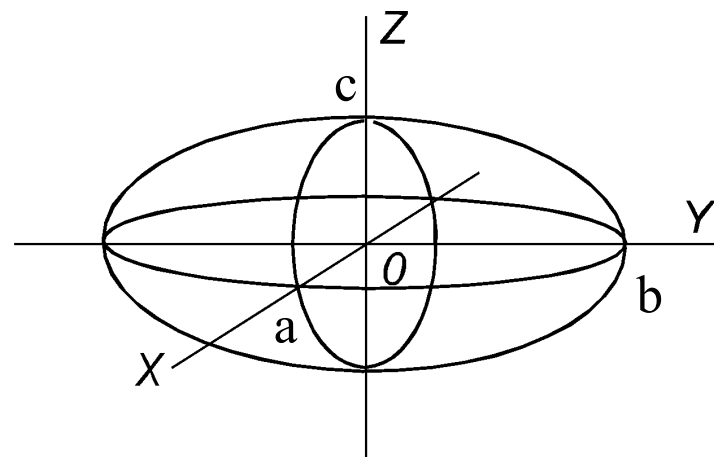
Эллипсоид

Каноническое уравнение трехосного эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a , b , c – полуоси эллипсоида.

Центр этого эллипсоида находится в начале координат.



Признаки уравнения эллипсоида:

1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Одинаковые знаки при квадратах переменных

1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

1.4. Знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны, пусть знаки $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ отличаются от знака λ_3 и $c = 0$, преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} - \frac{z^2}{-\frac{1}{\lambda_3}} = 0$$

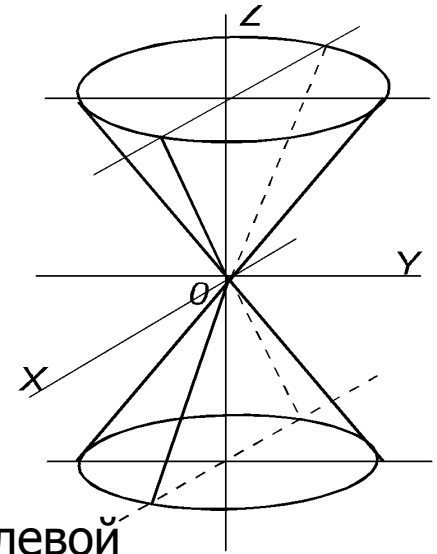
Получим каноническое уравнение **конуса**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Конусы 2-го порядка

Каноническое уравнение конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Ось симметрии конуса : перед квадратом какой переменной в левой части уравнения знак минус, та ось системы координат и будет являться осью симметрии. Для данного уравнения – это ось OZ.

Признаки уравнения конуса:

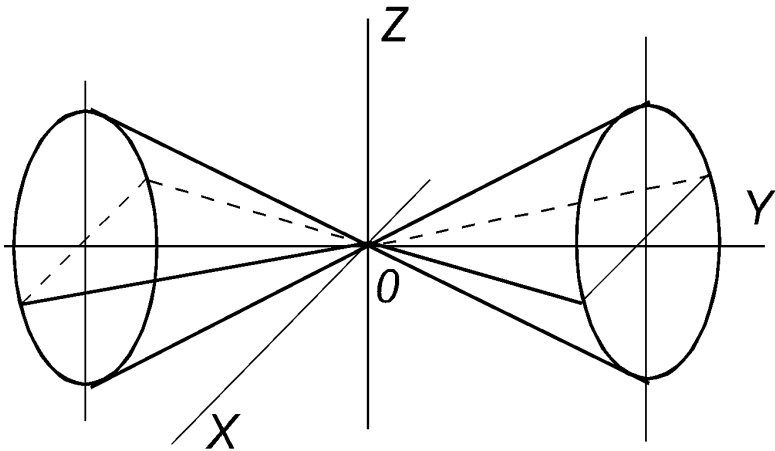
1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Свободный член в правой части уравнения равен нулю.

Конусы с разными осями симметрии

Ось симметрии конуса определяется по уравнению

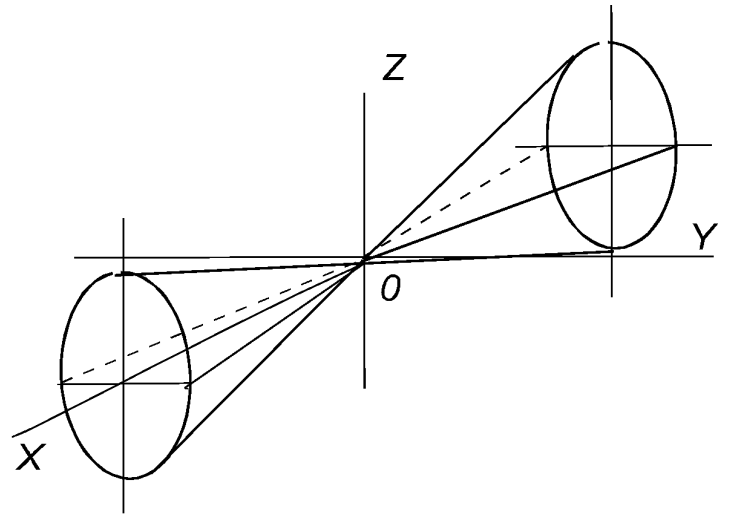
Конус с осью симметрии OY

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Конус с осью симметрии OX

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$



1. Все собственные числа ОТЛИЧНЫ ОТ НУЛЯ.

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0$$

1.5. Знаки $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ различны, пусть знаки $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ отличаются от знака λ_3 и $c \neq 0$, преобразуем уравнение

$$\frac{x^2}{\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{c}{\lambda_2}} - \frac{z^2}{-\frac{c}{\lambda_3}} = \pm 1$$

Получим каноническое уравнение **гиперболоида**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

Гиперболоиды

Канонические уравнения гиперболоидов

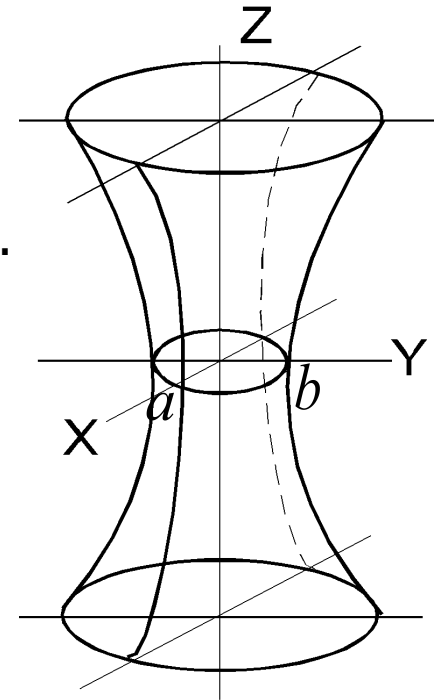
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

В зависимости от знака перед единицей в правой части гиперболоиды делятся на одно и двуполостные.

Каноническое уравнение **однополостного гиперболоида**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

a , b , c – полуоси



Признаки уравнения однополостного гиперболоида:

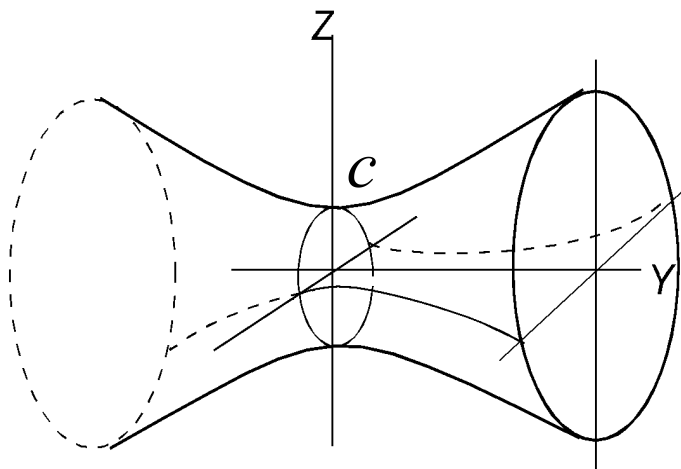
1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Один знак минус при квадрате переменной в левой части уравнения, в правой части плюс 1.

Разные ориентации однополостных гиперболоидов

Ориентация гиперболоида зависит от того, перед какой переменной в каноническом уравнении стоит знак минус.

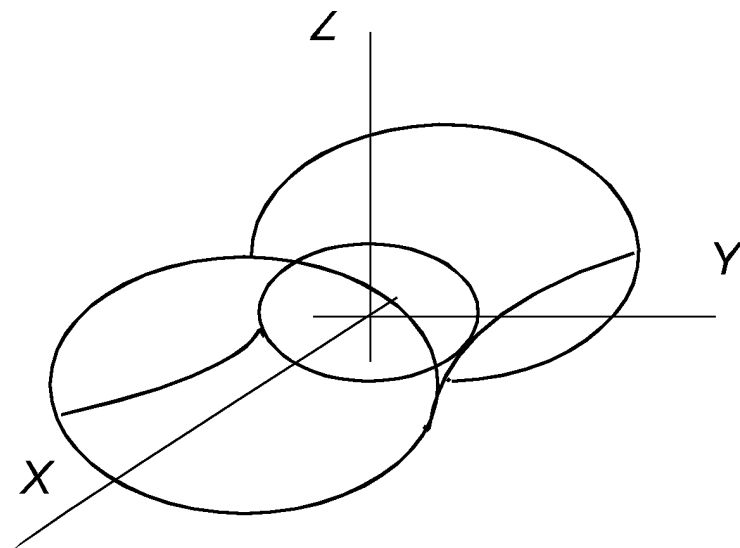
Однополостный гиперболоид
с осью симметрии OY

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Однополостный гиперболоид
с осью симметрии OX

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Гиперболоиды

Каноническое уравнение *двуполостного гиперboloида*

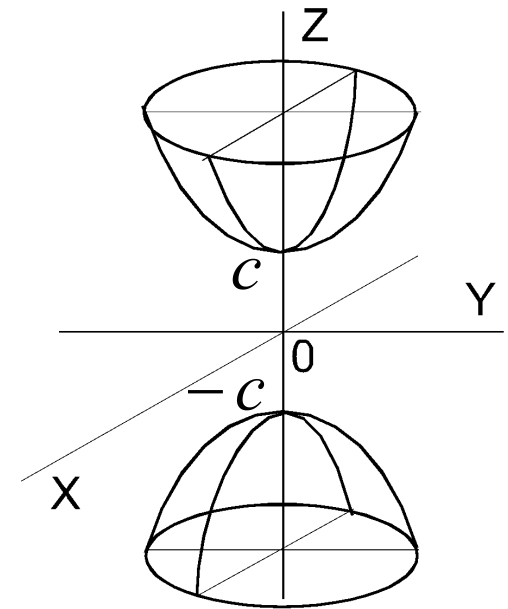
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

a, b, c – полуоси

Если из уравнения выразить z , то получим

$$z = \pm c \cdot \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1}$$

Т.к. $\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1} \geq 1$, то получается, что $|z| \geq c$



Двуполостный гиперboloид не проходит через начало координат.

Признаки уравнения двуполостного гиперboloида:

1. Наличие квадратов всех трех переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных
3. Два знака минус в уравнении: один при квадрате переменной в левой части уравнения, другой в правой части при 1.

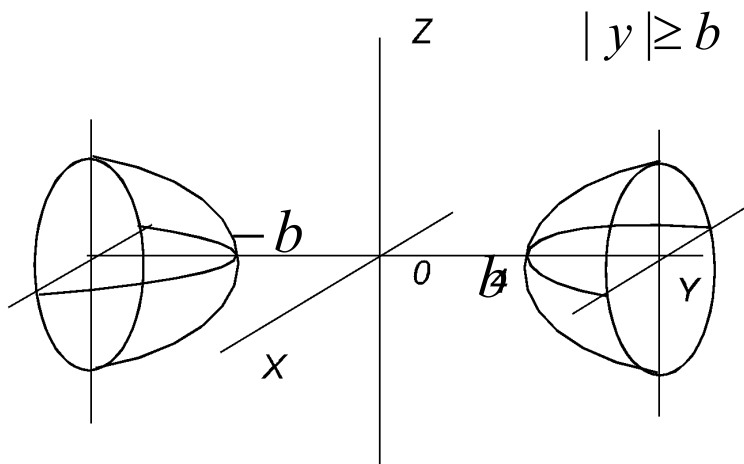
Разные ориентации двуполостного гиперboloида

Каноническое уравнение двуполостного гиперboloида содержит два знака минус в уравнении.

Один знак минус оставляем в левой части уравнения, а второй поставим перед единицей в правой части. В таком случае легко определить ось симметрии гиперboloида: перед квадратом какой переменной в левой части уравнения знак минус, та ось системы координат и будет являться осью симметрии.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$|y| \geq b$$



$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

$$|x| \geq a$$

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0$$

Выделим полные квадраты

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3 z + c' = 0$$

2.1. $b_3 = 0$, выполним параллельный перенос

$$x' = x + \frac{b_1}{\lambda_1}$$

получим

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + c' = 0$$

$$y' = y + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

$$z' = z$$

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

2.1.1. $c=0$, знаки λ_1, λ_2 одинаковы. Получим

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0$$

уравнение плоскости

2.1.2. $c \neq 0$, знаки λ_1, λ_2 и c одинаковы: $\frac{x^2}{\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{c}{\lambda_2}} = -1$

нет решений:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$$

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

2.1.3. $c \neq 0$, знаки λ_1, λ_2 одинаковы и отличаются от знака c :

$$\frac{x^2}{-\frac{c}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- эллиптический

цилиндр

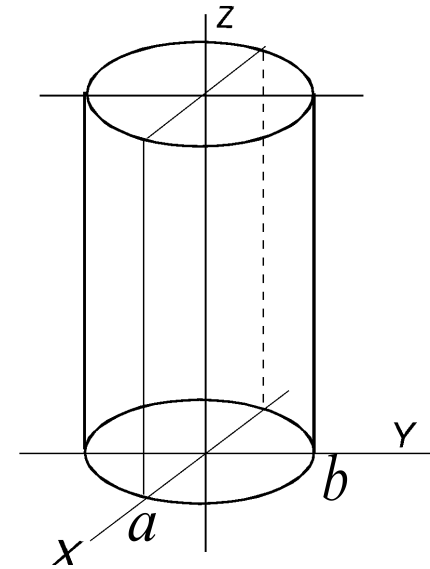
- Эллиптические цилиндры

Направляющей кривой являются эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{— ось симметрии } OZ$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{— ось симметрии } OX$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{— ось симметрии } OY$$



Для построения цилиндра строим эллипс с полуосями a и b в плоскости XOY , а затем «превращаем» этот эллипс в цилиндр, вытягивая вдоль оси симметрии.

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

2.1.4. $c=0$, знаки λ_1, λ_2 различны. Получим

$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm \sqrt{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} x$ уравнение
плоскостей

2.1.5. $c \neq 0$, знаки λ_1, λ_2 различны. $\frac{x^2}{\frac{c}{\lambda_1}} - \frac{y^2}{-\frac{c}{\lambda_2}} = \pm 1$

получим гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

- Гиперболические цилиндры

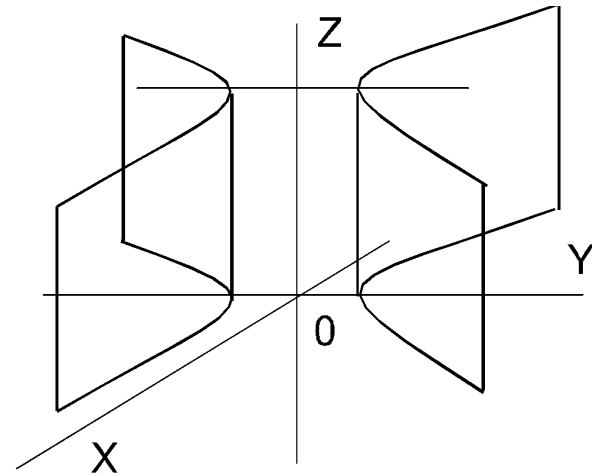
В качестве направляющей этих цилиндров служит гипербола.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1 \quad \text{— ось симметрии OZ}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \quad \text{— ось симметрии OX}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \quad \text{— ось симметрии OY}$$



При построении гиперболических цилиндров обязательно нужно правильно определить мнимую и действительную оси гиперболы и ось симметрии самого цилиндра.

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_1 x + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0$$

2.2. $b_3 \neq 0$

Выделим полные квадраты

$$\lambda_1 \left(x + \frac{b_1}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y + \frac{b_2}{\lambda_2}\right)^2 + 2b_3 \left(z + \frac{c'}{2b_3}\right) = 0$$

выполним параллельный перенос

$$x' = x + \frac{b_1}{\lambda_1}$$

$$y' = y + \frac{b_2}{\lambda_2}$$

получим $\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2b_3 z' = 0$

$$z' = z + \frac{c'}{2b_3}$$

2. Одно из собственных чисел равно нулю ($\lambda_3 = 0$).

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2b_3 z = 0$$

Преобразуем

$$\frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} \pm \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = -2b_3 z$$

Получим каноническое уравнение **параболоида**

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Параболоиды

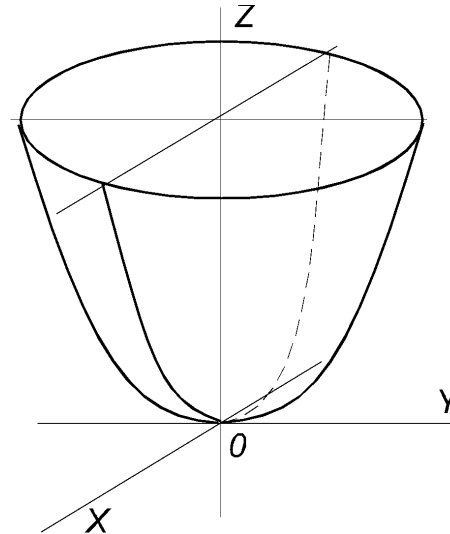
Канонические уравнения параболоидов можно записать в общем виде

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Таким образом, в уравнении отсутствует квадрат одной переменной. В зависимости от знака между квадратами двух других переменных различают эллиптические и гиперболические параболоиды

Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$



Признаки уравнения эллиптического или кругового параболоида:

1. Отсутствие квадрата одной из переменных
2. Одинаковые знаки при квадратах переменных в левой части уравнения

Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида имеет вид

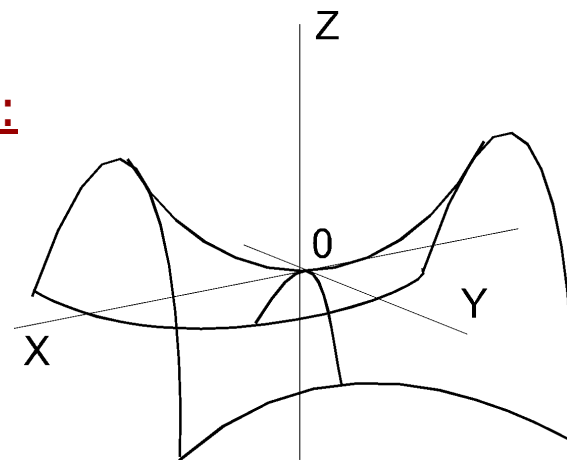
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Отличительным признаком уравнения гиперболического параболоида является то что в левой части уравнения между квадратами переменных знак минус.

Признаки уравнения гиперболического параболоида:

1. Отсутствие квадрата одной из переменных
2. Разные знаки при квадратах переменных в левой части уравнения

Эта поверхность имеет форму седла.



3. Два собственных числа равны нулю ($\lambda_2, \lambda_3 = 0$).

$$\lambda x^2 + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

Выделим полный квадрат

$$\lambda \left(x + \frac{b_1}{\lambda}\right)^2 + 2b_2y + 2b_3z + c' = 0$$

выполним параллельный перенос $x' = x + \frac{b_1}{\lambda}$

Получим

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$\lambda (x')^2 + 2b_2y' + 2b_3z' + c' = 0$$

3. Два собственных числа равны нулю ($\lambda_2, \lambda_3 = 0$).

$$\lambda x^2 + 2b_2 y + 2b_3 z + c = 0$$

3.1. $b_2, b_3 = 0$, получим

$$\lambda x^2 + c = 0$$

Это есть либо уравнения пересекающихся плоскостей, либо уравнение плоскости или нет решения.

3. Два собственных числа равны нулю ($\lambda_2, \lambda_3 = 0$).

3.2. хотя бы один из $b_2, b_3 \neq 0$. $\lambda x^2 + 2b_2(y + \frac{c}{2b_2}) + 2b_3z = 0$

перенос: $x' = x$

$$y' = y + \frac{c}{2b_2} \Rightarrow \lambda x'^2 + 2b_2 y' + 2b_3 z = 0$$

$$z' = z$$

поворот:

$$x = x'$$

$$y = y' \cos \theta - z' \sin \theta \Rightarrow \lambda(x')^2 + 2b_2(y' \cos \theta - z' \sin \theta) + 2b_3(y' \sin \theta + z' \cos \theta) = 0$$

$$z = y' \sin \theta + z' \cos \theta$$

$$\Rightarrow \lambda(x')^2 + y'(2b_2 \cos \theta + 2b_3 \sin \theta) + z'(-2b_2 \sin \theta + 2b_3 \cos \theta) = 0$$

Подбираем угол таким образом, чтобы пропал коэффициент при z :

$$\Rightarrow \lambda(x')^2 + 2b_2 y' = 0 \Rightarrow x'^2 = \pm 2py$$

параболический цилиндр

• Параболические цилиндры

Направляющей этих цилиндров является парабола.

$$x^2 = 2py$$

$$x^2 = \pm 2py \text{ — ось симметрии } OZ$$

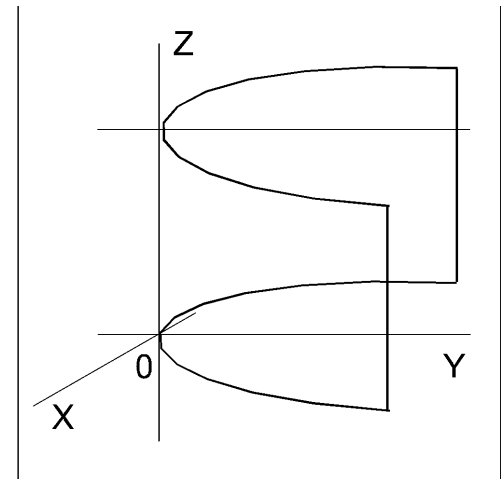
$$y^2 = \pm 2px \text{ — ось симметрии } OZ$$

$$y^2 = \pm 2pz \text{ — ось симметрии } OX$$

$$z^2 = \pm 2py \text{ — ось симметрии } OX$$

$$x^2 = \pm 2pz \text{ — ось симметрии } OY$$

$$z^2 = \pm 2px \text{ — ось симметрии } OY$$



При построении цилиндра нужно определить основные параметры параболы: координаты вершины, ось симметрии и направление ветвей, построить параболу, а затем уже строить цилиндр с соответствующей осью симметрии.