Игры с природой

Принятие решений в условиях неопределенности и риска

Теория принятия решений

- Теория принятия решений — аналитический подход к выбору наилучшего действия (альтернативы) или последователь ности действий

Модели теории принятия решений

- выбор решений в условиях определенности, если относительно каждого действия известно, что оно неизменно приводит к некоторому конкретному исходу;
- выбор решения при риске, если каждое действие приводит к одному из множества возможных частных исходов, причем каж дый исход имеет вычисляемую или экспертно оцениваемую веро ятность появления. Предполагается, что ЛПР эти вероятности известны или их можно определить путем экспертных оценок;
- выбор решений при неопределенности, когда то или иное действие или несколько действий имеют своим следствием мно жество частных исходов, но их вероятности совершенно не из вестны или не имеют смысла

Понятие риска

- Под *риском* принято понимать вероятность (угрозу) потери лицом или организацией части своих ресурсов, недополучения доходов или появления дополнительных расходов в результате осуществления определенной производственной и финансовой политики

Виды рисков

- *производственный,* связанный с возможностью невыполнения фирмой своих обязательств перед заказчиком;
- *кредитный,* обусловленный возможностью невыполнения фирмой своих финансовых обязательств перед инвестором;
- *процентный,* возникающий вследствие непредвиденного изменения процентных ставок;
- *риск ликвидности,* обусловленный неожиданным изменением кредитных и депозитных потоков;
- *инвестиционный,* вызванный возможным обесцениванием инвестиционно-финансового портфеля, состоящего из собственных и приобретенных ценных бумаг;
- *рыночный,* связанный с вероятным колебанием рыночных процентных ставок как собственной национальной денежной единицы, так и зарубежных курсов валют

Динамический и статический риски

- *Динамический риск* связан с возникновением непредвиденных изменений стоимости основного капитала вследствие принятия управленческих решений, а также рыночных или политических обстоятельств. Такие изменения могут привести как к потерям, так и к дополнительным доходам.
- *Статический риск* обусловлен возможностью потерь реальных активов вследствие нанесения ущерба собственности и потерь дохода из-за недееспособности организации

Основное назначение анализа риска

- Обеспечение партнеров информацией, необходимой для принятия решений о целесообразности участия в некотором проекте, и предусмотрение мер по защите от возможных финансовых потерь

Условия или предположения при анализе риска

- потери от риска не зависят друг от друга;
- потери по одному из некоторого перечня рисков не обяза тельно увеличивают вероятность потерь по другим;
- максимально возможный ущерб не должен превышать финансовых возможностей участников проекта

Факторы, влияющие на рост степени риска в проекте

- *Объективные факторы* непосредственно не зависят от самой фирмы: это инфляция, конкуренция, анархия, политические и экономические кризисы, экология, налоги и т. д.
- *Субъективные факторы* непосредственно характеризуют данную фирму: это производственный потенциал, техническое оснащение, уровень производительности труда, проводимая финансовая, техническая и производственная политика, в частности выбор типа контракта между инвесто ром и заказчиком.

Мера риска

- *Мерой риска* некоторого коммерческого (финансового) решения или операции следует считать среднее квадратичное отклонение (положительный квадратный корень из дисперсии) значения показателя эффективности этого решения или операции.

- Показателем эффективности финансового решения (операции) служит прибыль

Пример

- Рассмотрим выбор некоторым лицом одного из двух вариантов инвестиций в условиях риска. Пусть имеются два проекта *A* и *B,* в которые указанное лицо может вложить средства. Проект *A* в определенный момент в будущем обеспечивает случайную величину прибыли. Предположим, что ее среднее ожидаемое значение, математическое ожидание, равно m_A с дисперсией S_A^2
- Для проекта *B* эти числовые характеристики прибыли как случайной величины предполагаются равными соответственно m_B и S_B^2
- Средние квадратичные отклонения равны соответственно S_A и S_B

Возможные случаи выбора проекта

a) $m_A = m_B$, $S_A < S_B$, следует выбрать проект *A;*

b) $m_A > m_B$, $S_A < S_B$, следует выбрать проект *A;*

c) $m_A > m_B$, $S_A = S_B$, следует выбрать проект *A;*

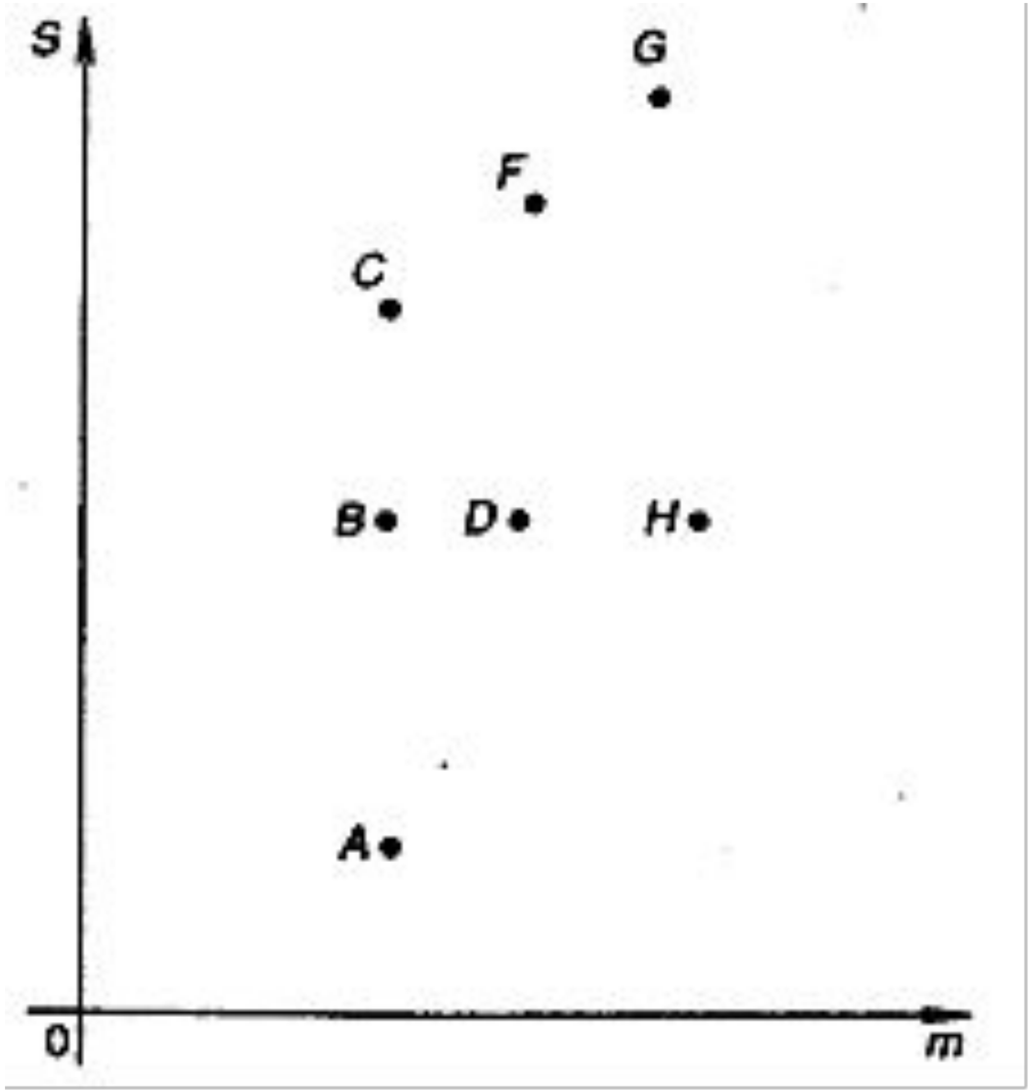
d) $m_A > m_B$, $S_A > S_B$;

e) $m_A < m_B$, $S_A < S_B$.

- В последних двух случаях решение о выборе проекта *A* или *B* зависит от отношения к риску ЛПР

Пример выбора из более чем двух вариантов инвестиций

- Характеристики вариантов показаны точками на плоскости *(m, S),* где *m* – средняя прибыль, получаемая в результате инвестиции, а *S* – среднее квадратичное отклонение прибыли
- Среди вариантов *A, B* и С наиболее предпочтителен *A.*
- Из вариантов *B, D* и *H* следовало бы выбрать *H.*
- Вариант *H* лучше вариантов С и *F.*
- Сравнительная предпочтительность вариантов *A, D, F* и *G* зависит от склонности ЛПР к риску



Неопределенность

- Лицу, принимающему решение известен лишь набор возможных вариантов состояний внешней среды
- В условиях неопределенности вероятностное распределение, соответствующее состояниям j (j = 1, 2, ..., n) либо неизвестно, либо не может быть определено
- Ситуация с полной неопределенностью характеризуется отсутствием какой бы то ни было дополнительной информации

Матрица последствий

- Если будет принято i-е решение, а состояние внешней среды соответствует j-й ситуации, то лицо, принимающее решение, получит доход q_{ij}.
- Плата (или доход), связанная с решением A_i и состоянием внешней среды s_j, равна q_{ij}
- Матрица $Q=(q_{ij})$, $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$ называется **матрицей последствий** (платежной матрицей)

Матрица сожалений (рисков)

- Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-е решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы мы знали, что осуществляется j-е состояние внешней среды, то выбрали бы наилучшее решение, т. е. приносящее наибольший доход

$$q_j = \max(q_{kj}),\ k=1,2,\ldots,m$$

- Значит, принимая i-е решение, мы рискуем получить не q_j, а только q_{ij}, т. е. если мы примем i-е решение, а во внешней среде реализуется j-е состояние, то мы будем **сожалеть** о недополученном доходе в размере

$$r_{ij} = q_j - q_{ij} = \max(q_{kj}) - q_{ij}\ ,\ k=1,2,\ldots,m$$

- Матрица $R = (r_{ij})$ называется **матрицей сожалений** (матрицей рисков)

Критерий Лапласа (критерий безразличия)

- **Критерий Лапласа** опирается на принцип недостаточного основания, который гласит, что, *поскольку распределение вероятностей состояний $P(s_j)$ неизвестно, нет причин считать их различными*. Следовательно, используется оптимистическое предположение, что вероятности всех состояний природы равны между собой, т.е.

$$P\{s_1\} = P\{s_2\} = ... = P\{s_n\} = 1/n.$$

- Если при этом q_{ij} представляет получаемую прибыль, то наилучшим решением является то, которое обеспечивает

$$\max\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}\right\}$$ (максимум берется по всем строкам)

- Если величина q_{ij} представляет расходы лица, принимающего решение, то оператор «max» заменяется на «min»

Максимаксный критерий (критерий крайнего оптимизма)

- **Максимаксный (минимаксный) критерий** основан на оптимистичном поведении лица, принимающего решение, и сводится к выбору наилучшей альтернативы из наилучших. Если величина q_{ij} представляет получаемую прибыль, то в соответствии с максимаксным критерием в качестве оптимального выбирается решение, обеспечивающее

$$\max_i \{ \max_j (q_{ij}) \}$$

- Если величина q_{ij} представляет потери, используется минимаксный критерий, который определяется следующим соотношением

$$\min_i \{ \max_j (q_{ij}) \}$$

Правило Вальда (крайнего пессимизма)

- Рассматривая *i*-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация, наихудшая с нашей точки зрения (т. е. приносящая наиме $a_i = \min\limits_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij}$ од) и выберем решение i_0 с наибольшим a_i .
- *Необходимо принять такое решение i_0, что*

$$a_{i_0} = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_i = \max_{i=1,2,\ldots,m} \left(\min_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij} \right)$$

Правило Сэвиджа

- **Критерий Сэвиджа** стремится смягчить консерватизм минимаксного (максиминного) критерия путем замены матрицы платежей (выигрышей или проигрышей) q_{ij} матрицей потерь r_{ij} . При применении этого правила анализируется матрица сожалений **R**. Рассматривая *i*-е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ксимальных сожалений

$$b_i = \max_{j=1,2,\ldots,n} r_{ij}$$

и выберем решение i_0 с наименьшим b_i .

Необходимо при

$$b_{i_0} = \min_{i=1,2,\ldots,m} b_i = \min_{i=1,2,\ldots,m} \left(\max_{j=1,2,\ldots,n} r_{ij} \right)$$

Правило Гурвица

- Этот критерий охватывает ряд различных подходов к принятию решений – от наиболее оптимистичного до наиболее пессимистичного (консервативного).
- Пусть $0 \le \lambda \le 1$ – показатель оптимизма,
- q_{ij} представляют доходы.
- *Принимается решение i_0, на котором достигается максимум выражения*

$$\lambda \min_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=1,2,\ldots,n} q_{ij}$$

- Значение λ выбирается из субъективных соображений.
- Если $\lambda \to 1$, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, если $\lambda \to 0$, то правило Гурвица приближается к правилу розового оптимизма.

Пример 1

- В приближении посевного сезона фермер Мак-Кой имеет 4 альтернативы: выращивать кукурузу (a_1), пшеницу (a_2), соевые бобы (a_3) или использовать землю под пастбища (a_4). Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на 4 категории: сильные осадки (s_1), умеренные осадки (s_2), незначительные осадки (s_3), засушливый сезон (s_4). Платежная матрица (в тыс. долларов) оценивается следующим образом.

$$
\begin{array}{c}
a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4
\end{array}
\begin{pmatrix}
-20 & 60 & 30 & -5 \\
40 & 50 & 35 & 0 \\
-50 & 100 & 45 & -10 \\
12 & 15 & 15 & 10
\end{pmatrix}
$$

Что должен посеять фермер Мак-Кой?

Матрица сожалений для примера

- Составим матрицу сожалений. Находим максимум по каждому столбцу

$$q_1 = \max_{i=1,2,3,4} q_{i1} = 40 \qquad q_2 = \max_{i=1,2,3,4} q_{i2} = 100$$

$$q_3 = \max_{i=1,2,3,4} q_{i3} = 45 \qquad q_4 = \max_{i=1,2,3,4} q_{i4} = 10$$

Матрица сожалений имеет вид

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} \begin{pmatrix} 60 & 40 & 15 & 15 \\ 0 & 50 & 10 & 10 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \\ 28 & 85 & 30 & 0 \end{pmatrix}$$

Критерий Лапласа

- При заданных вероятностях P{s_j} = 1/4, j = 1, 2, 3, 4 ожидаемые значения платежей для различных возможных решений вычисляются следующим образом.

M{a_1} = (1/4)(-20 + 60 + 30 - 5) = 16,25,

M{a_2} = (1/4)(40 + 50 + 35 + 0) = 31,25,

M{a_3} = (1/4)(-50 + 100 + 45 - 10) = 21,25,

M{a_4} = (1/4)(12 + 15 + 15 + 10) = 13,

- Наибольшее значение платежей соответствует второй стратегии a_2 , т.е. **правило Лапласа рекомендует посеять пшеницу**.

Критерий Вальда

- Минимальные элементы строк матрицы последствий

a_1 =min(-20, 60, 30, -5) = -20,

a_2 =min(40, 50, 35, 0) = 0,

a_3 =min(-50, 100, 45, -10) = -50,

a_4 =min(12, 15, 15, 10) = 10,

Теперь находим оптимальное решение

a_{i0} = max(-20, 0, -50, 10) = 10.

- Значит, **правило Вальда рекомендует** принять четвертое решение, т.е. **использовать земли под пастбища**.

Критерий Сэвиджа

- Максимальные элементы строк матрицы сожалений ***R***

$$b_1 = \max(60, 40, 15, 15) = 60,$$
$$b_2 = \max(0, 50, 10, 10) = 50,$$
$$b_3 = \max(90, 0, 0, 20) = 90,$$
$$b_4 = \max(28, 85, 30, 0) = 85,$$

Теперь находим оптимальное решение

$$b_{i0} = \min(60, 50, 90, 85) = 50.$$

- Значит, **правило Сэвиджа** также, как и правило Вальда, **рекомендует** принять второе решение, т.е. **посеять пшеницу**

Критерий Гурвица

Альтернатива	Минимум в строке	Максимум в строке	$\lambda \cdot min + (1-\lambda) \cdot max$	$\lambda=0,5$	$\lambda=0,8$	$\lambda=0,2$
a_1	-20	60	$-20\lambda+60(1-\lambda)$	20	-14	44
a_2	0	50	$60(1-\lambda)$	**30**	**12**	48
a_3	-50	100	$-50\lambda+100(1-\lambda)$	25	-20	**70**
a_4	10	15	$10\lambda+15(1-\lambda)$	12,5	11	14

При $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 0,8$ оптимальным решением является выбор альтернативы a_2

Правило Гурвица рекомендует принять второе решение, т.е. **посеять пшеницу**.

Критерии ожидаемого значения

Предположим, что в рассмотренной схеме известны вероятности p_j того, что реальная ситуация развивается по варианту j. Именно такое положение называется **частичной неопределенностью (риском)**.

При принятии решений в таких ситуациях можно выбрать одно из следующих правил:

- Правило максимизации дохода
- Правило минимизации ожидаемых сожалений

Правило максимизации дохода

- Доход, получаемый при принятии *i*-го решения, является случайной величиной Q_i с рядом распределения

Q_i	q_{i1}	q_{i2}	$\cdots$	q_{in}
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

- *Ожидаемый доход* при принятии *i*-го решения оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}Q_i$ соответствующей случайной величины Q_i.
- *Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, приносящее максимальный ожидаемый доход.*

$$\mathbf{M}Q_{i_0} = \max_{i=1,\,2,\,\ldots,\,m} \mathbf{M}Q_i = \max_{i=1,\,2,\,\ldots,\,m} \left(\sum_{j=1}^{n} q_{ij} p_j \right)$$

Правило минимизации ожидаемых сожалений

- Сожаления при реализации *i*-го решения представляются случайной величиной R_i с рядом распределения

$$\begin{array}{c|cccc} R_i & r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{in} \\ \hline p & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

- *Ожидаемые сожаления* оценивается математическим ожиданием $\mathbf{M}R_i$ соответствующей случайной величины R_i.
- *Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, влекущее минимальные ожидаемые сожаления*

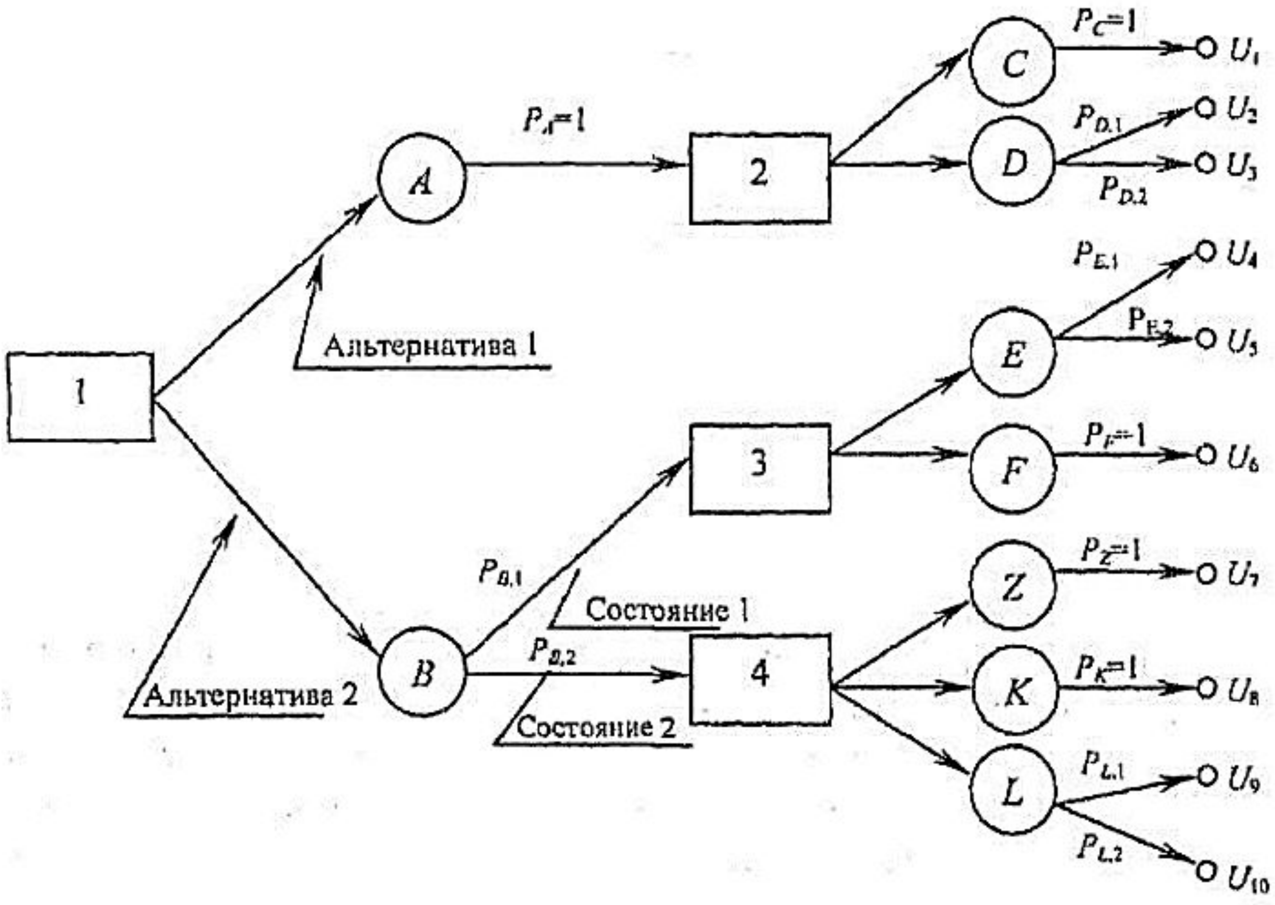
$$\mathbf{M}R_{i_0} = \min_{i=1,2,\ldots,m} \mathbf{M}R_i = \min_{i=1,2,\ldots,m} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{ij} p_j \right)$$

Теорема эквивалентности правил максимизации ожидаемого дохода и минимизации ожидаемых сожалений

- *Решения, рекомендуемые правилами максимизации ожидаемого дохода и минимизации ожидаемых сожалений, всегда совпадают.*

Дерево решений

- Дерево решений – это графическое средство анализа решений в условиях риска.
- Рисуют деревья слева направо



Этапы построения дерева решений

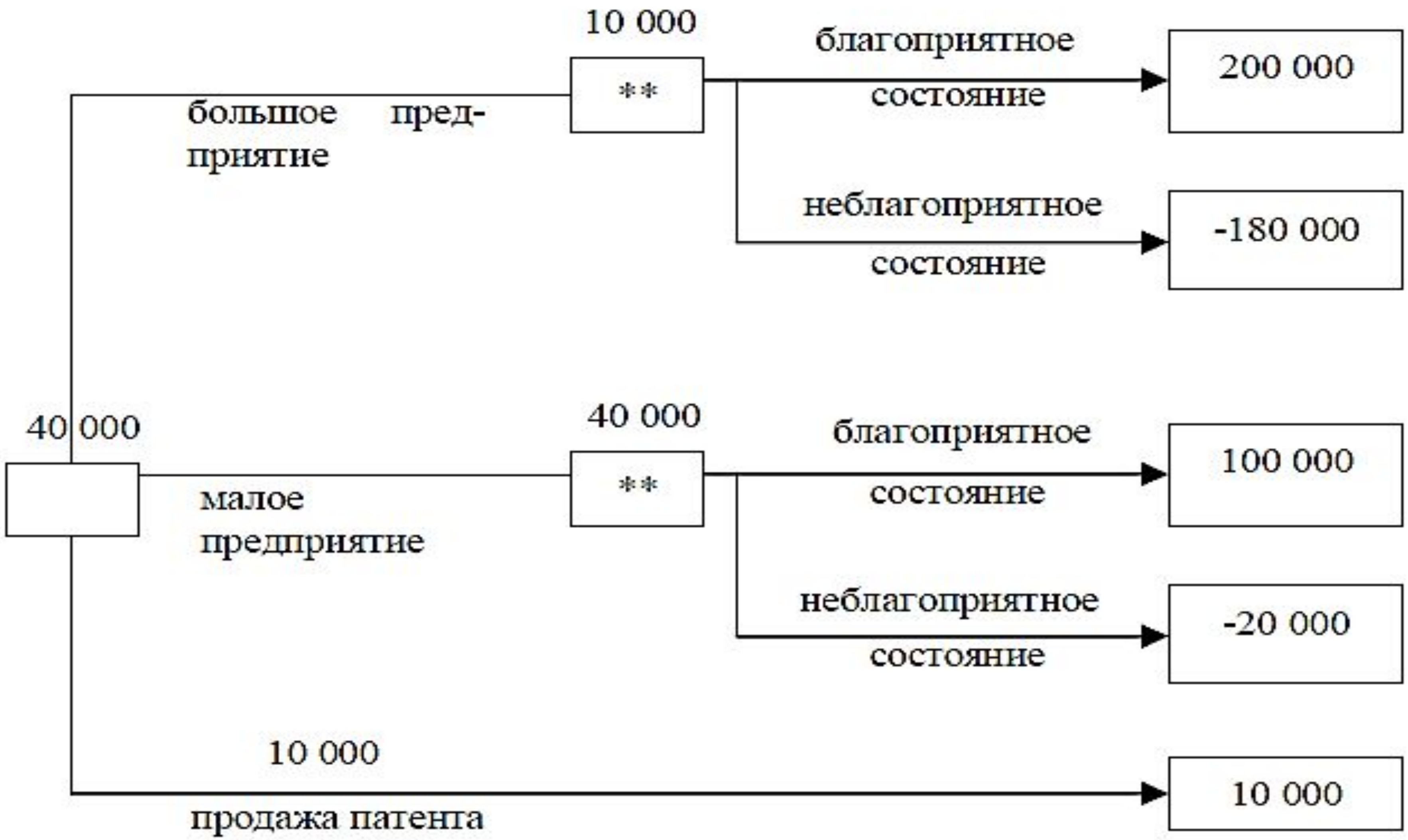
1. Постановка проблемы и поиск альтернатив решения
2. Конструирование дерева решений в виде схематичного представления комплекса решаемых подпроблем
3. Анализ дерева решений производится, начиная от конечных исходов к начальному узлу принятия решений. Такой процесс вычислений называется обратным пересчетом
4. Анализ устойчивости решения
5. Оценка ожидаемой ценности точной информации

Пример 2

- Руководство некоторой компании решает, создавать ли для выпуска новой продукции крупное производство, малое предприятие или продать патент другой фирме. Размер дохода, который компания может получить, зависит от состояния рынка, который может быть благоприятным или неблагоприятным с вероятностью 0,5. размеры возможных доходов (расходы идут со знаком минус) изображены в таблице. Найдите оптимальную экономическую стратегию предприятия

Номер стратегии	Действия компании	Доход компании, тыс. руб.	
		Благоприятное состояние рынка	Неблагоприятное состояние рынка
1	Строительство крупного предприятия	200 000	- 180 000
2	Строительство малого предприятия	100 000	- 20 000
3	Продажа патента	10 000	10 000

Дерево решений задачи инвестирования



Правило максимизации дохода

- Вычислим средний ожидаемый доход инвестора при каждой возможной стратегии

MQ_1 = 0,5 × 200 000 + 0,5 ×(-180 000) = 10 000 тыс. руб.;

MQ_2 = 0,5 × 100 000 + 0,5 ×(-20 000) = 40 000 тыс. руб.;

MQ_3 = 10 000 тыс. руб.

- Наиболее целесообразно выбрать стратегию a_2, т.е. **строить малое предприятие**, а ветви (стратегии) a_1 и a_3 дерева решений можно отбросить
- Ожидаемая денежная оценка наилучшего решения равна 40 000 тыс.руб.

Ожидаемая ценность точной информации

- Предположим, что консультационная фирма за определенную плату готова предоставить информацию о фактической ситуации на рынке в тот момент, когда руководству компании надлежит принять решение о масштабе производства
- **Ожидаемая ценность точной информации** о фактическом состоянии рынка **равна разности между ожидаемой денежной оценкой при наличии точной информации и максимальной ожидаемой денежной оценкой при отсутствии точной информации**

Пример расчета ожидаемой ценности точной информации

Рассчитаем ожидаемую ценность точной информации для примера, в котором дополнительное обследование конъюнктуры рынка не проводится.

При отсутствии точной информации максимальная ожидаемая денежная оценка равна:

ОДО = 0,5 × 100 000 - 0,5 × 20 000 = 40 000 тыс. руб.

Если точная информация об истинном состоянии рынка будет благоприятной, то

$ОДО_{т.и}$ = 0,5 × 200 000 + 0,5 × 10 000 = 105 000 тыс. руб.

Ожидаемая ценность точной информации

Тогда ожидаемая ценность точной информации равна:

$ОЦ_{т.и} = ОДО_{т.и} - ОДО = 105\,000 - 40\,000 = 65\,000$ тыс. руб.

Значение $ОЦ_{т.и}$ показывает, какую максимальную цену должна быть готова заплатить компания за точную информацию об ис тинном состоянии рынка в тот момент, когда ей это необходимо

Усложненная задача строительства

- Пусть перед тем, как принимать решение о строительстве, руководство компании должно определить, заказывать ли дополнительное исследование состояния рынка или нет, причем предоставляемая услуга обойдется компании в 10 000 дол. Руководство понимает, что дополнительное исследование по-прежнему не способно дать точной информации, но оно поможет уточнить ожидаемые оценки конъюнктуры рынка, изменив тем самым значения вероятностей

Усложненная задача строительства

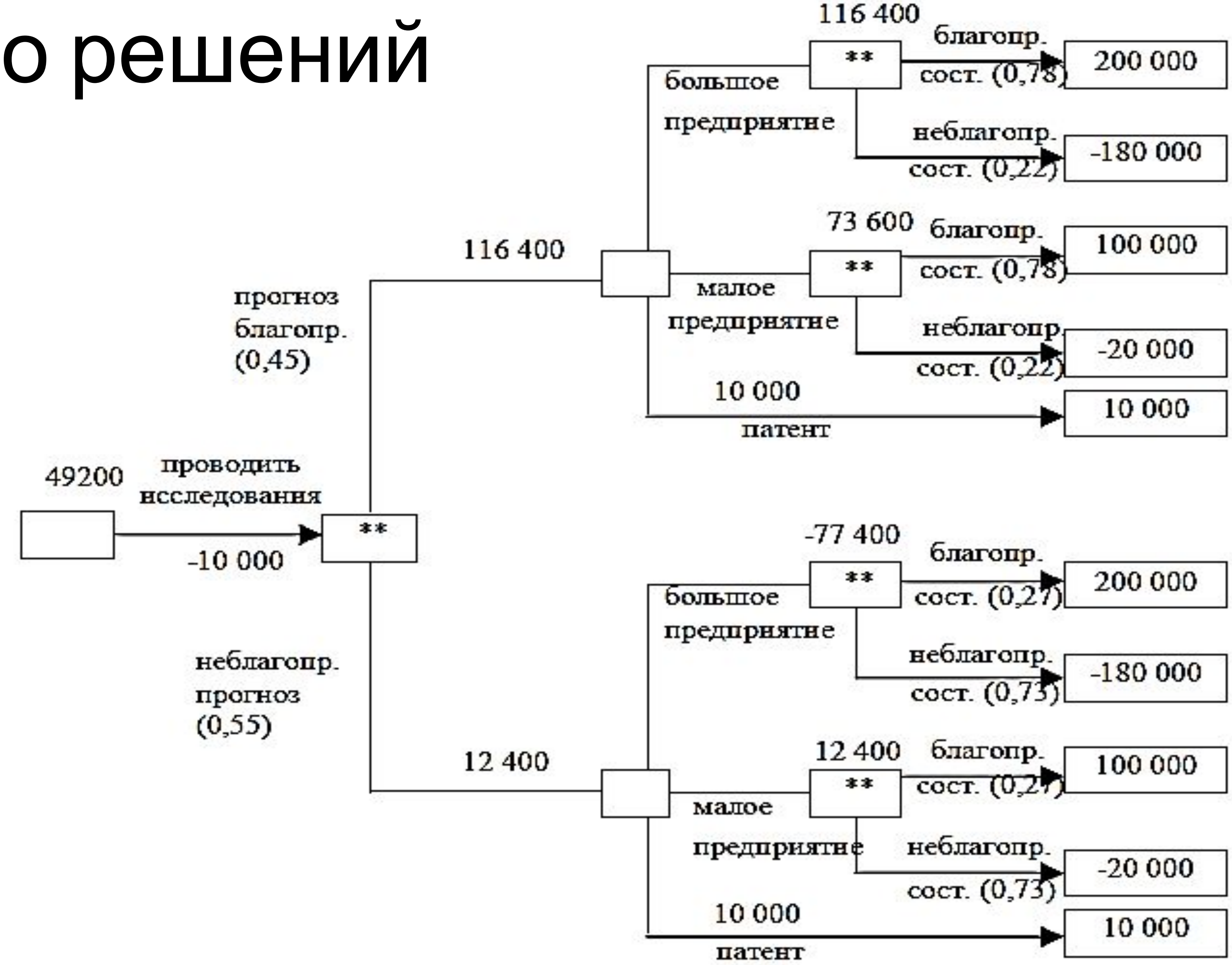
Относительно фирмы, которой можно заказать прогноз, известно, что она способна уточнить значения вероятностей благоприятного или неблагоприятного исхода. Например, когда фирма утверждает, что рынок благоприятный, то с вероятностью 0,78 этот прогноз оправдывается (с вероятностью 0,22 могут возникнуть неблагоприятные условия), прогноз о неблагоприятном рынке оправдывается с вероятностью 0,73. Фирма утверждает, что ситуация будет благоприятной с вероятностью 0,45 и неблагоприятной с вероятностью 0,55.

Следует ли заказывать фирме дополнительное обследование рынка?

Какую максимальную сумму фирма может выплатить консультационной фирме за проделанную работу?

Какова ожидаемая денежная оценка наилучшего решения?

Дерево решений



Результаты исследования

Анализируя дерево решений, можно сделать следующие выводы:

- необходимо проводить дополнительное исследование конъюнктуры рынка, поскольку это позволяет существенно уточнить принимаемое решение;
- если фирма прогнозирует благоприятную ситуацию на рынке, то целесообразно строить большое предприятие (ожидаемая максимальная прибыль 116 400 тыс. руб.), если прогноз не благоприятный – малое (ожидаемая максимальная прибыль 12 400 тыс. руб.).
- максимальная сумма, которую компания может заплатить за услуги фирмы составляет 59 200 - 40 000 = 19 200 тыс. руб.

Пример 3

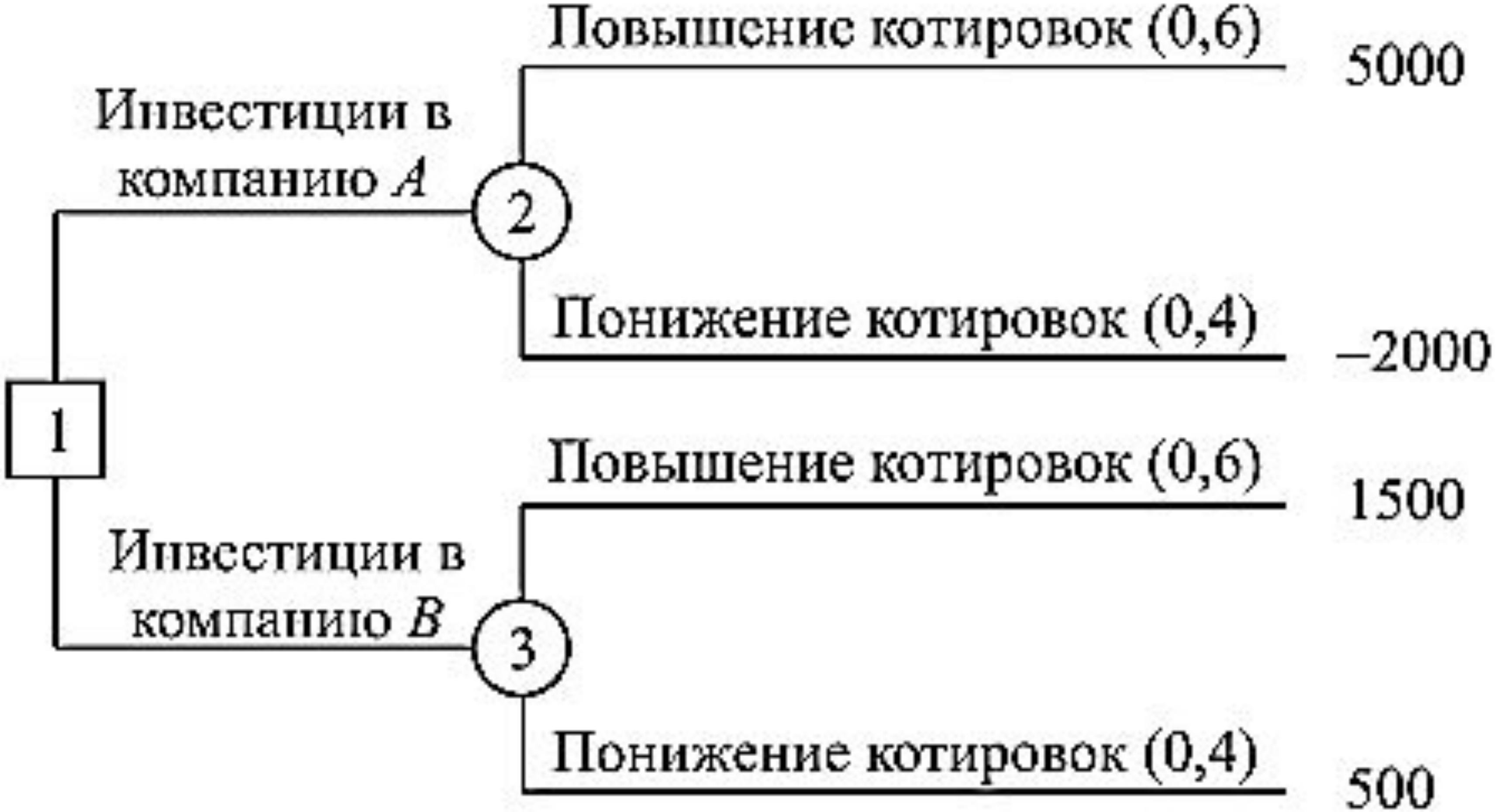
- Предположим, что вы хотите вложить на фондовой бирже 10 000 долл. в акции одной из двух компаний: A или B. Акции компании A являются рискованными, но могут принести 50% прибыли от суммы инвестиции на протяжении следующего года. Если условия фондовой биржи будут неблагоприятны, сумма инвестиции может обесцениться на 20%. Компания B обеспечивает безопасность инвестиций с 15% прибыли в условиях повышения котировок на бирже и только 5% в условиях понижения котировок. Все аналитические публикации, с которыми можно познакомиться (а они всегда есть в изобилии в конце года), с вероятностью 60 % прогнозируют повышение котировок и с вероятностью 40 % – понижение котировок. В какую компанию следует вложить деньги?

Решение

- Информация, связанная с принятием решения, суммирована в следующей таблице

Альтернативные решения	**Прибыль за один год от инвестиции 10 000 долл.**	
	При повышении котировок (долл.)	При понижении котировок (долл.)
Акции компании А	5000	-2000
Акции компании В	1500	500
Вероятность события	0,6	0,4

Дерево решений задачи инвестирования



Правило максимизации дохода

- Ожидаемая прибыль за год для каждой из двух альтернатив.
- Для акций компании А:

$$MQ1 = 5000 \times 0{,}6 + (-2000) \times 0{,}4 = 2\,200 \text{ (долл.)}.$$

- Для акций компании В:

$$MQ2 = 1500 \times 0{,}6 + 500 \times 0{,}4 = 1\,100 \text{ (долл.)}.$$

- Решением, основанным на этих вычислениях, является ***покупка акций компании А.***

Апостериорные вероятности Байеса

- В некоторых случаях оказывается возможным пересчитать вероятности, которые используются при формулировке критерия ожидаемого значения, с помощью текущей и/или полученной ранее информации, которая обычно основывается на исследовании выборочных (или экспериментальных) данных. Получаемые при этом вероятности называют **апостериорными** (или **байесовскими**), в отличие от априорных, полученных из исходной информации

Пример 4

- В примере 3 априорные вероятности 0,6 и 0,4 повышения и понижения котировок акций на бирже были определены из наличных публикаций финансового характера.
- Предположим, вместо того, чтобы полностью полагаться на эти публикации, вы решили провести личное исследование путем консультаций с другом, который хорошо разбирается в вопросах, касающихся фондовой биржи. Друг высказывает общее мнение «за» или «против» инвестиций. Это мнение в дальнейшем определяется количественно следующим образом. При повышении котировок его мнение с 90% - ной вероятностью будет «за», при снижении котировок вероятность его мнения «за» уменьшится до 50%. Каким образом можно извлечь пользу из этой дополнительной информации?

Решение

- Введем следующие обозначения:

  v_1 – мнение «за»,

  v_2 – мнение «против»,

  m_1 – повышение котировок,

  m_2 – понижение котировок.

- Мнение друга можно записать в виде вероятностных соотношений следующим образом.

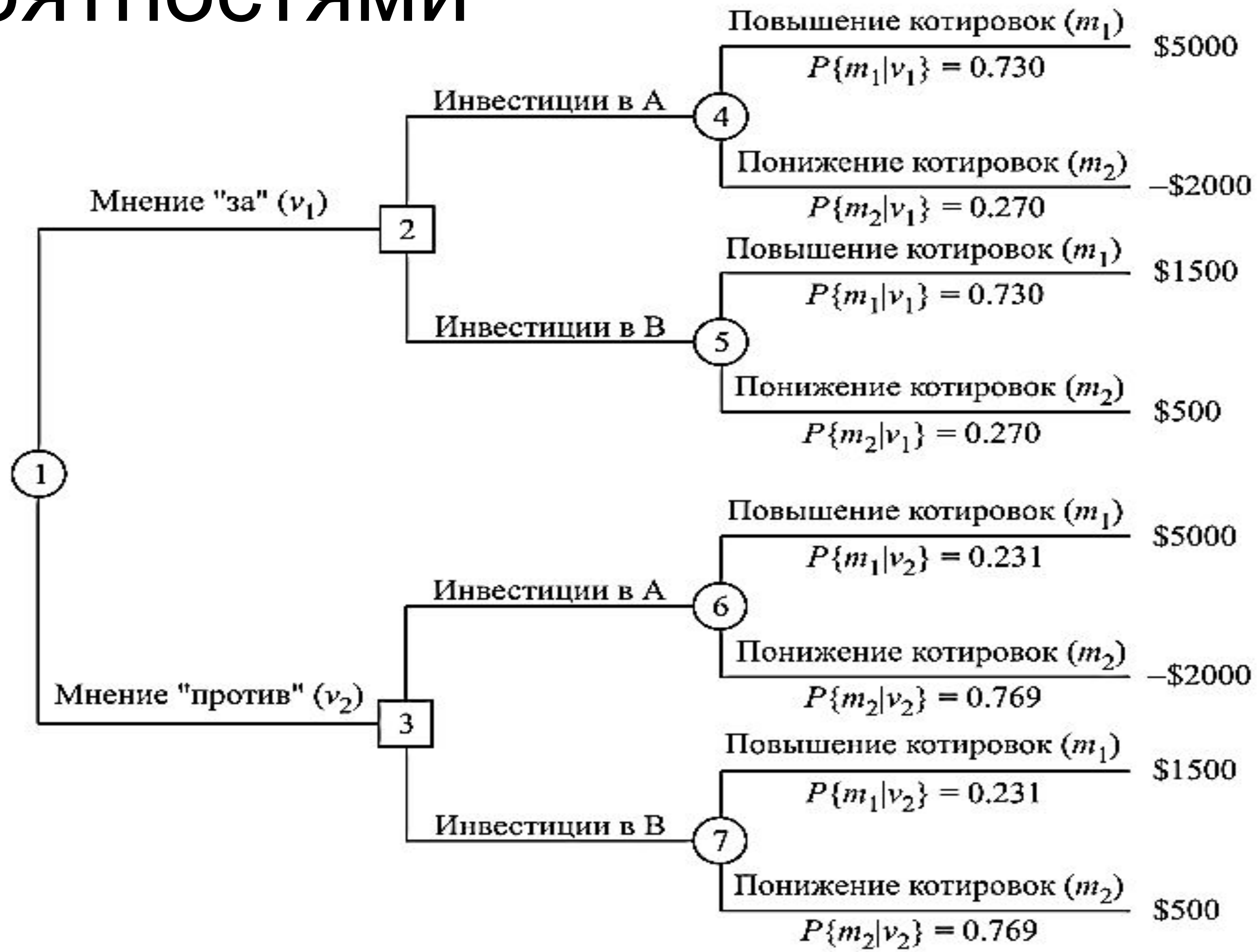
  $P\{v_1 \mid m_1\} = 0{,}9$,

  $P\{v_1 \mid m_2\} = 0{,}1$,

  $P\{v_2 \mid m_1\} = 0{,}5$,

  $P\{v_2 \mid m_2\} = 0{,}5$.

Дерево решений с апостериорными вероятностями



Решение

- Вычислим апостериорные вероятности P{m_i | v_j}, указанные на соответствующих ветвях, выходящих из узлов 4 – 7.
- **Шаг 1.** Условные вероятности P{v_j | m_i} для данной задачи запишем следующим образом

$P\{v_j \mid m_i\} =$

	v_1	v_2
m_1	0,9	0,1
m_2	0,5	0,5

Решение

- **Шаг 2.** Вычисляем вероятности совместного появления событий

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j \mid m_i\} P\{m_i\} \text{ для всех } i \text{ и } j.$$

- При заданных априорных вероятностях $P\{m_1\}=0,6$ и $P\{m_2\}=0,4$ вероятности совместного появления событий определяются умножением первой и второй строк таблицы, полученной на шаге 1, на 0,6 и 0,4 соответственно

$P\{m_i, v_j\} =$

	v_1	v_2
m_1	0,54	0,06
m_2	0,20	0,20

Решение

- **Шаг 3.** Вычисляем абсолютные вероятности

$$P\{v_j\} = \sum_{\text{по всем } i} P\{m_i, v_j\} \text{ для всех } j.$$

- Эти вероятности получаются путем суммирования элементов соответствующих столбцов таблицы, полученной на шаге 2

$P\{v_1\}$	$P\{v_2\}$
0,74	0,26

Решение

- **Шаг 4.** Определяем искомые апостериорные вероятности по формуле

$$P\{m_i \mid v_j\} = \frac{P\{m_i, v_j\}}{P\{v_j\}}.$$

- Эти вероятности вычисляются в результате деления каждого столбца таблицы, полученной на шаге 2, на элемент соответствующего столбца таблицы, вычисленной на шаге 3, что приводит к следующим результатам (округленным до трех десятичных знаков).

	v_1	v_2
m_1	0,730	0,231
m_2	0,270	0,769

Решение

- Оценим альтернативные решения, основанные на ожидаемых платежах для узлов 4 – 7.

Мнение «за»

- Доход от акций компании А в узле 4 = 5000 × 0,730 + (-2000) × 0,270 = 3110 (долл.).
- Доход от акций компании B в узле 5 = 1500 × 0,730 + 500 × 0,270 = 1230 (долл.).

Решение. *Инвестировать в акции компании А.*

Мнение «против»

- Доход от акций компании А в узле 6 = 5000 × 0,231 + (-2000) × 0,769 = -383 (долл.).
- Доход от акций компании B в узле 7 = 1500 × 0,231 + 500 × 0,769 = 731 (долл.)

Пример

- Исследовать ситуацию принятия решений в условиях неопределенности в случае, когда матрица последствий

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

- Найти оптимальное решение, если известны вероятности состояний внешней среды

1/2, 1/6, 1/6, 1/6.

Решение

- Составим матрицу сожалений. Имеем:

$$q_1 = \max_{k=1,2,\ldots,m} q_{k1} = 8, \qquad q_2 = 5, \qquad q_3 = 8, \qquad q_4 = 12$$

Поэтому матрица сожалений

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Правило Вальда

- По правилу Вальда (правилу крайнего пессимизма) будем полагать, что при принятии *i* -го решения на самом деле складывается самая плохая ситуация, т. е. приносящая наименьший доход $a_i = \min_j q_{ij}$, и выберем решение i_0 с наибольшим a_{i0}.
- Имеем: $a_1 = 2, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 1.$
- Из этих чисел 2, 2, 3, 1 находим максимальное: это 3.
- Значит, правило Вальда рекомендует принять третье решение.

Правило Сэвиджа

- Правило Сэвиджа аналогично правилу Вальда, только анализируется матрица сожалений: рассматривая *i* -е решение, будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимальных $b_i = \max_j r_{ij}$ ий , и выберем решение i_0 с наименьшим b_{i_0} .
- Имеем $b_1 = 8, \quad b_2 = 6, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 7.$
- Из этих чисел 8, 6, 5, 7 находим минимальное. Это 5.
- Значит, правило Сэвиджа рекомендует принять третье решение.

Критерии ожидаемого значения

- Правило максимизации ожидаемого дохода рекомендует принять решение, соответствующее наибольшему из ожидаемых доходов:

$$\mathbf{M}Q1 = 23/6,\ \mathbf{M}Q2 = 25/6,\ \mathbf{M}Q3 = 7\ \mathbf{M}Q4 = 17/6.$$

- Максимальный ожидаемый доход равен 7, что соответствует третьему решению.
- Правило минимизации ожидаемых сожалений рекомендует принять решение, соответствующее наименьшему из ожидаемых сожалений:

$$\mathbf{M}R1 = 20/6,\ \mathbf{M}R2 = 4,\ \mathbf{M}R3 = 7/6,\ \mathbf{M}R4 = 32/5,$$

т. е. опять третье решение.