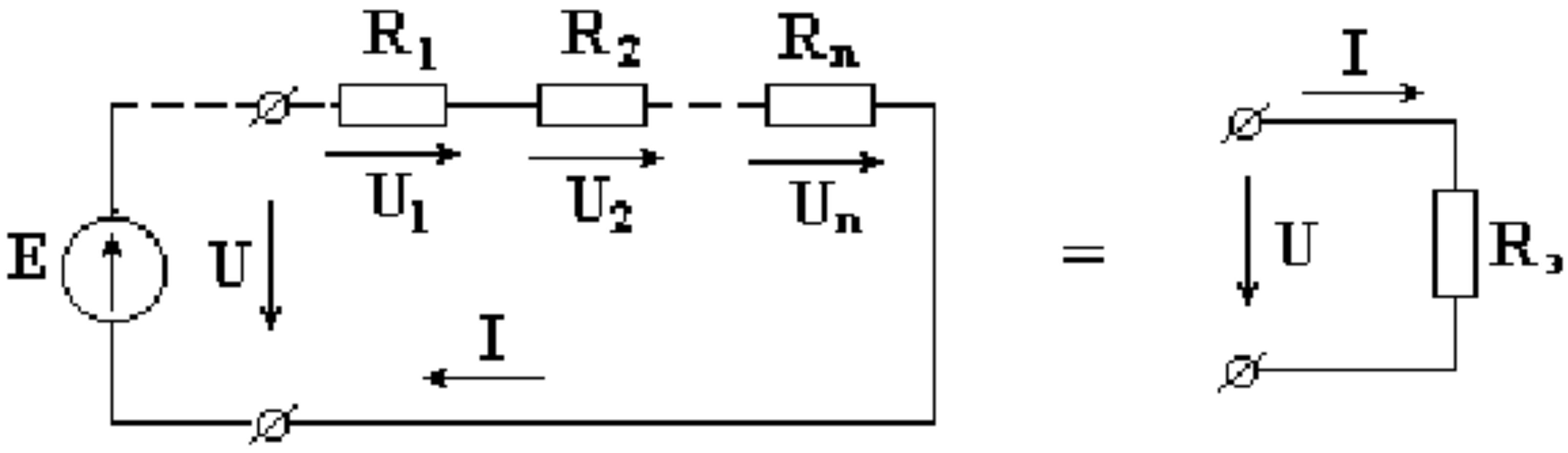
ЛЕКЦИЯ 2

Эквивалентные преобразования схем

Эквивалентным называется преобразование, при котором напряжения и токи в частях схемы, не подвергшихся преобразованию, не меняются.

Последовательное соединение элементов электрических цепей

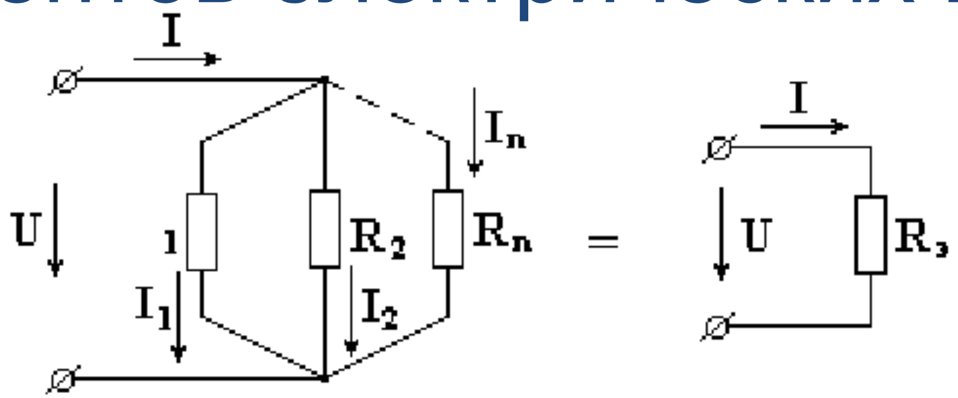


$$U_1 = I \cdot R_1 \quad U_2 = I \cdot R_2 \quad U_n = I \cdot R_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + \ldots + I \cdot R_n =$$
$$= I \cdot (R_1 + R_2 + \ldots + R_n) = I \cdot R_э$$

где $R_э = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$ - эквивалентное сопротивление.

Параллельное соединение элементов электрических цепей



$$I_1 = \frac{U}{R_1} = U \cdot g_1; \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = U \cdot g_2; \quad \dots \quad I_n = \frac{U}{R_n} = U \cdot g_n;$$

где $g_1 = \frac{1}{R_1}$, $g_2 = \frac{1}{R_2}$, $\dots$ $g_n = \frac{1}{R_n}$ - проводимости 1-й, 2-й и n-й ветвей.

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U \cdot g_1 + U \cdot g_1 + \dots + U \cdot g_1 = U \cdot (g_1 + g_2 + \dots + g_n) =$$

$$= U \cdot g_э,$$

где $g_э = g_1 + g_2 + \dots + g_n$

$$R_э = \frac{1}{g_э}$$

Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду

Сопротивление луча эквивалентной звезды сопротивлений равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, деленному на сумму сопротивлений всех сторон треугольника.

$$R_{\lambda 1} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{\lambda 2} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad R_{\lambda 3} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3};$$

$$R_э = R_0 + R_{\lambda 1} + \frac{(R_{\lambda 2} + R_4) \cdot (R_{\lambda 3} + R_5)}{R_{\lambda 2} + R_4 + R_{\lambda 3} + R_5}.$$

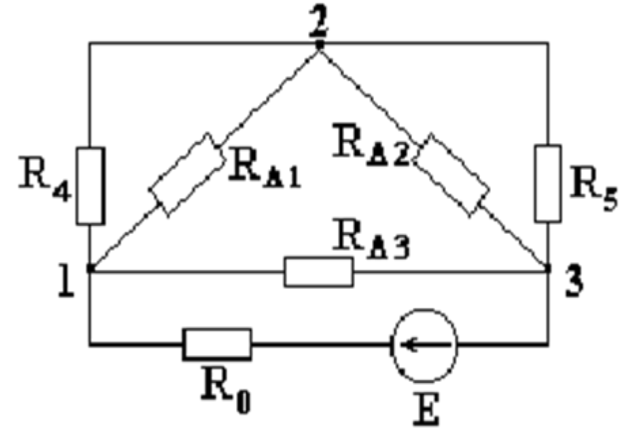
Преобразование звезды сопротивлений в эквивалентный треугольник

Сопротивление стороны эквивалентного треугольника сопротивлений равно сумме сопротивлений двух прилегающих лучей звезды плюс произведение этих же сопротивлений, деленное на сопротивление оставшегося (противолежащего) луча.

Сопротивления сторон треугольника определяются по формулам:

$$R_{\Delta 1} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}; \quad R_{\Delta 2} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{\Delta 3} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

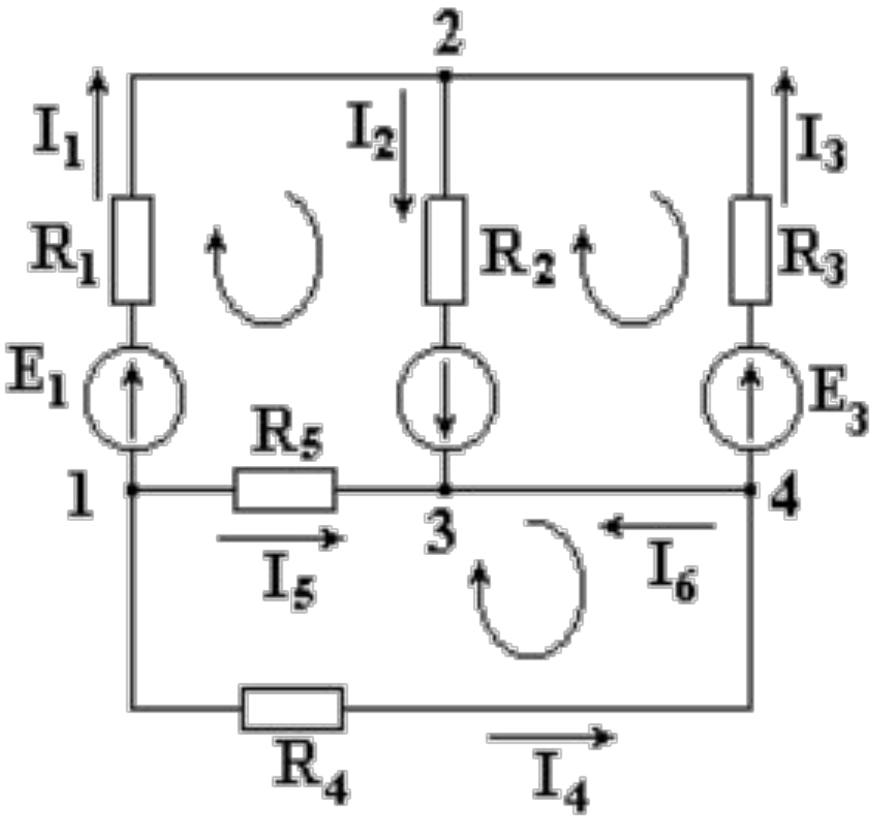


Эквивалентное сопротивление преобразованной схемы равно:

$$R_э = R_0 + \frac{\left(\dfrac{R_4 \cdot R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \dfrac{R_5 \cdot R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}}\right) \cdot R_{\Delta 3}}{\dfrac{R_4 \cdot R_{\Delta 1}}{R_4 + R_{\Delta 1}} + \dfrac{R_5 \cdot R_{\Delta 2}}{R_5 + R_{\Delta 2}} + R_{\Delta 3}}$$

Анализ сложных электрических цепей с несколькими источниками энергии

1. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа



Если в схеме имеется n узлов, количество независимых уравнений, которые можно составить по первому закону Кирхгофа, равно n - 1.

$$\begin{aligned} -I_1 - I_5 - I_4 &= 0 \\ I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ I_2 + I_5 + I_6 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Недостающее количество уравнений составляют по второму закону Кирхгофа. Уравнения по второму закону составляют для независимых контуров.

Независимым является контур, в который входит хотя бы одна новая ветвь, не вошедшая в другие контуры.

Выберем три независимых контура и укажем направления обхода контуров. Запишем три уравнения по второму закону Кирхгофа.

$$
\begin{aligned}
E_1 + E_2 &= -I_5 \cdot R_5 + I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 \\
-E_2 - E_3 &= -I_2 \cdot R_2 - I_3 \cdot R_2 \\
0 &= I_5 \cdot R_5 - I_4 \cdot R_4
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Решив совместно системы уравнений (1) и (2), определим токи в схеме.

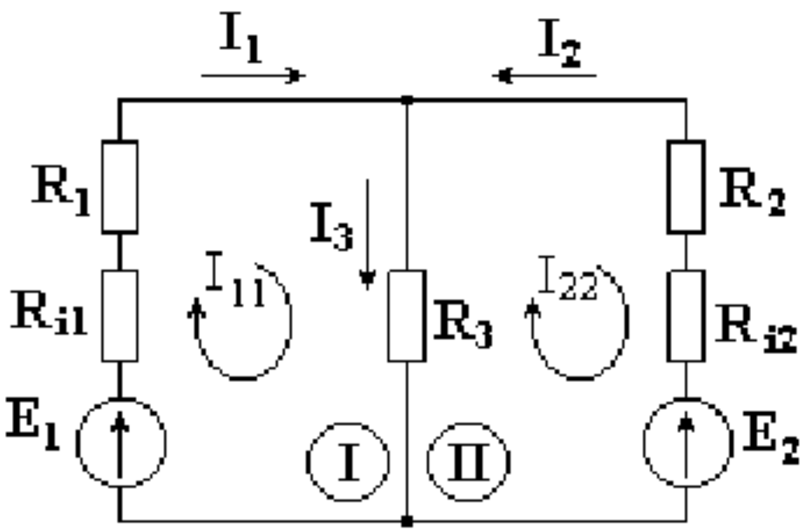
Ток в ветви может иметь отрицательное значение!

Это означает, что действительное направление тока противоположно выбранному нами.

2. Метод контурных токов

Число уравнений, составленных по методу контурных токов, равно количеству уравнений, составляемых по второму закону Кирхгофа.

Метод контурных токов (МКТ) заключается в том, что вместо токов в ветвях определяются, на основании второго закона Кирхгофа, так называемые контурные токи, замыкающиеся в контурах.



I_{11} и I_{22} - контурные токи

Токи в сопротивлениях R_1 и R_2 равны соответствующим контурным токам.

Ток в сопротивлении R_3, являющийся общим для обоих контуров, равен разности контурных токов I_{11} и I_{22}, так как эти токи направлены в ветви с R_3 встречно.

Порядок расчета:

1. Выбираются независимые контуры, и задаются произвольные направления контурных токов.

Уравнения для этих контуров имеют следующий вид:

$$I_{11}\cdot(R_1+R_{i2})+I_{11}\cdot R_3-I_{22}\cdot R_3=E_1$$

$$I_{22}\cdot(R_{i2}+R_2)+I_{22}\cdot R_3-I_{11}\cdot R_3=-E_2$$

Перегруппируем слагаемые в уравнениях:

$$I_{11}\cdot(R_1+R_{i2}+R_3)-I_{22}\cdot R_3=E_1=E_{11} \qquad (1)$$

$$-I_{11}\cdot R_3+I_{22}\cdot(R_{i2}+R_2+R_3)=-E_2=E_{22} \qquad (2)$$

Суммарное сопротивление данного контура называется ***собственным сопротивлением контура.***

Собственные сопротивления контуров нашей схемы:

$$R_{11} = R_1 + R_{i1} + R_3, \quad R_{22} = R_{i2} + R_2 + R_3$$

Сопротивление R_3, принадлежащее одновременно двум контурам, называется ***общим сопротивлением этих контуров.***

$E_{11} = E_1$ и $E_{22} = E_2$ - контурные ЭДС.

Решая уравнения (1) и (2) совместно, определим контурные токи I_{11} и I_{22}, затем от контурных токов переходим к токам в ветвях.

Ветви схемы, по которым протекает один контурный ток, называются ***внешними***, а ветви, по которым протекают несколько контурных токов, называются ***общими.***

Ток во внешней ветви совпадает по величине и по направлению с контурным.

Ток в общей ветви равен алгебраической сумме контурных токов, протекающих в этой ветви.

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{22}, \quad I_3 = I_{11} - I_{22}$$

Метод эквивалентного генератора

Этот метод используется тогда, когда надо определить ток только в одной ветви сложной схемы.

Часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами называется ***двухполюсником***.

Двухполюсники, содержащие источники энергии, называются ***активными.*** (рис.1)

Двухполюсники, не содержащие источников, называются ***пассивными***. (рис.2)

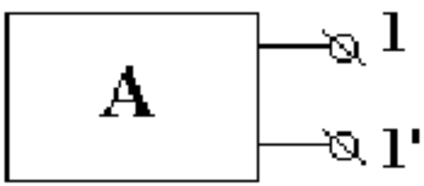


Рисунок 1

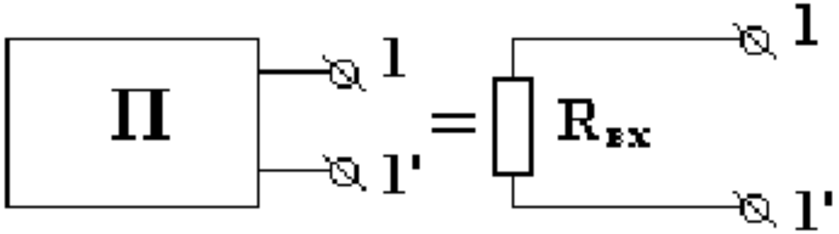
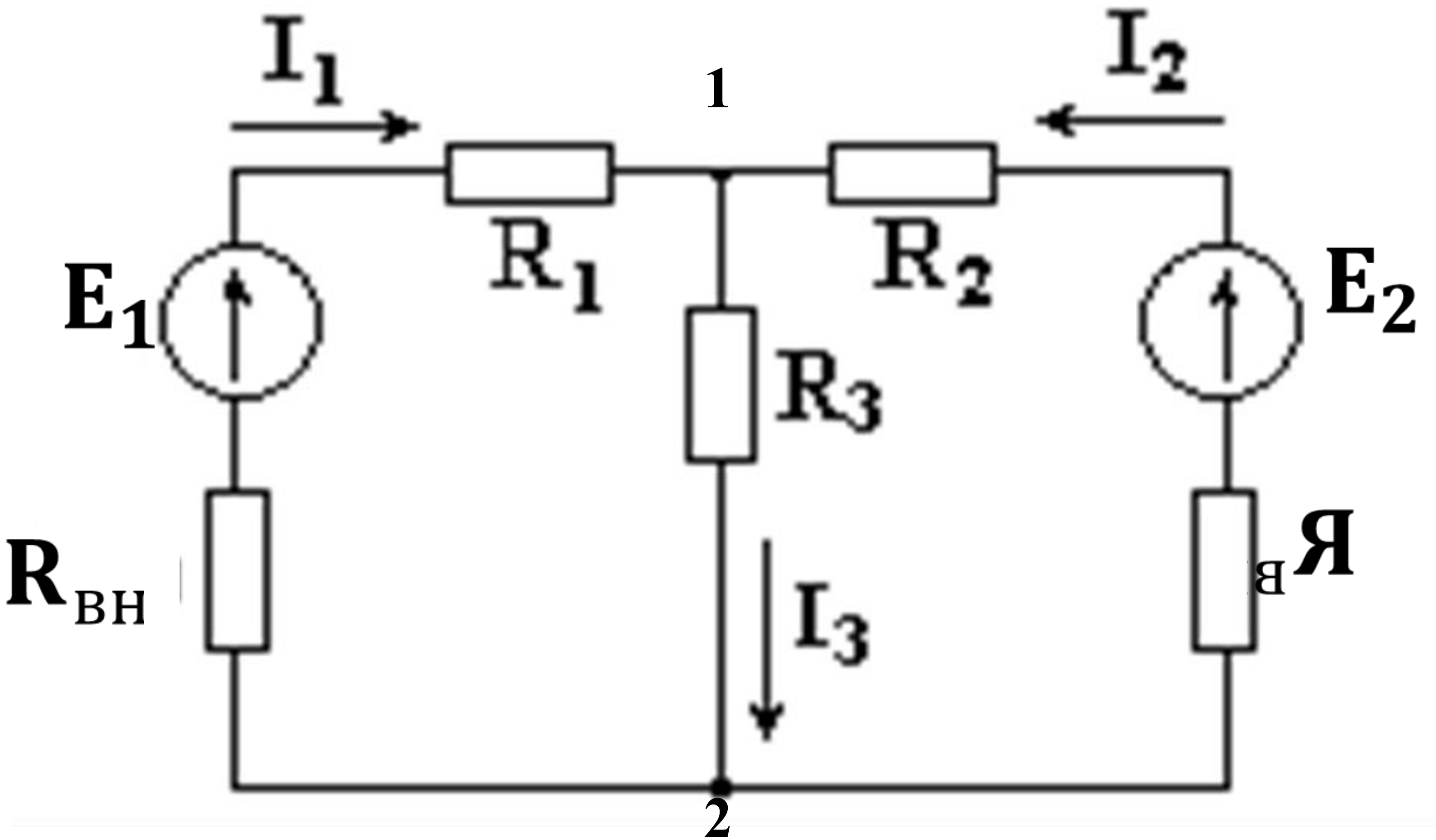


Рисунок 2

Входное сопротивление пассивного двухполюсника можно измерить.

Если известна схема пассивного двухполюсника, входное сопротивление его можно определить, свернув схему относительно заданных зажимов.

Дана электрическая цепь.



Необходимо определить ток I_1 в ветви с сопротивлением R_1 в этой цепи.

Выделим эту ветвь, а оставшуюся часть схемы заменим активным двухполюсником (рис.3).

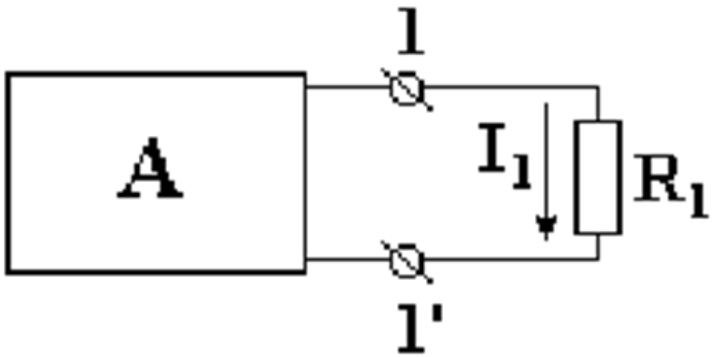


Рисунок 3

Теорема об активном двухполюснике:

любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором (источником напряжения) с ЭДС, равным напряжению холостого хода на зажимах этого двухполюсника и внутренним сопротивлением, равным входному сопротивлению того же двухполюсника, из схемы которого исключены все источники (рис. 4).

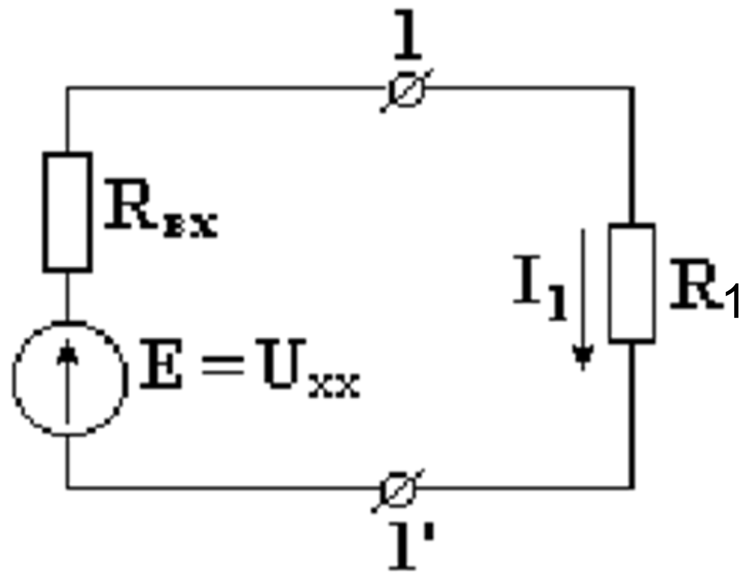
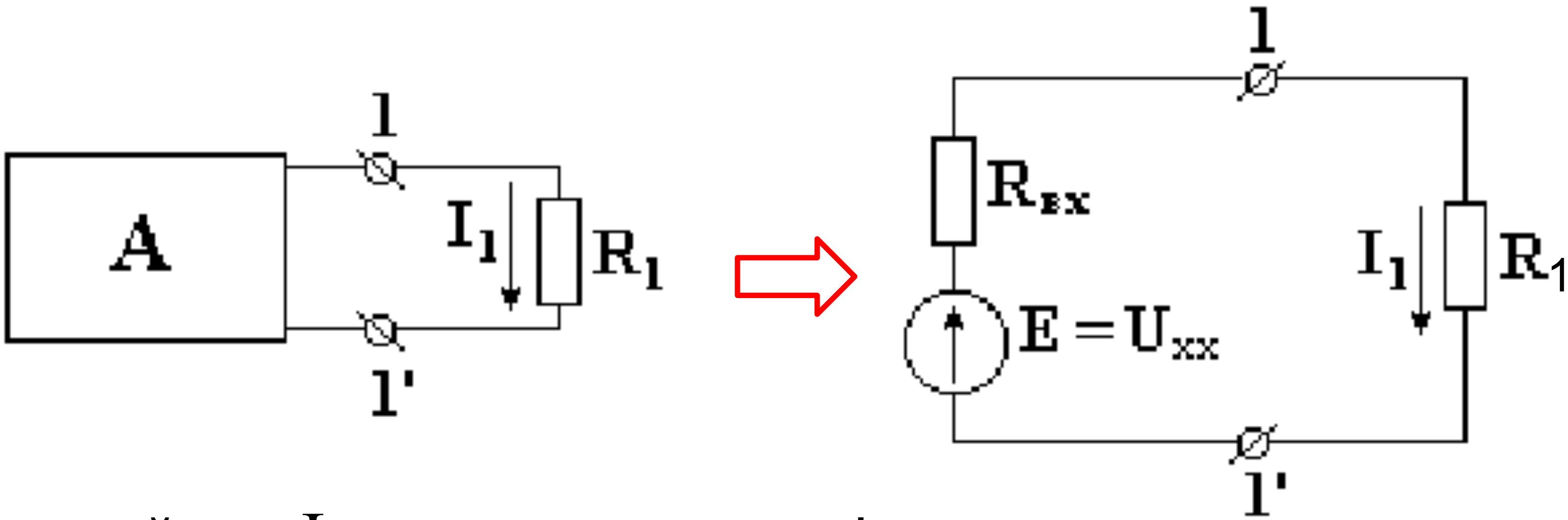


Рисунок 4



Искомый ток I_1 определится по формуле:

$$I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{вх} + R_1}$$

Параметры эквивалентного генератора (напряжение холостого хода и входное сопротивление) можно определить экспериментально или расчетным путем.

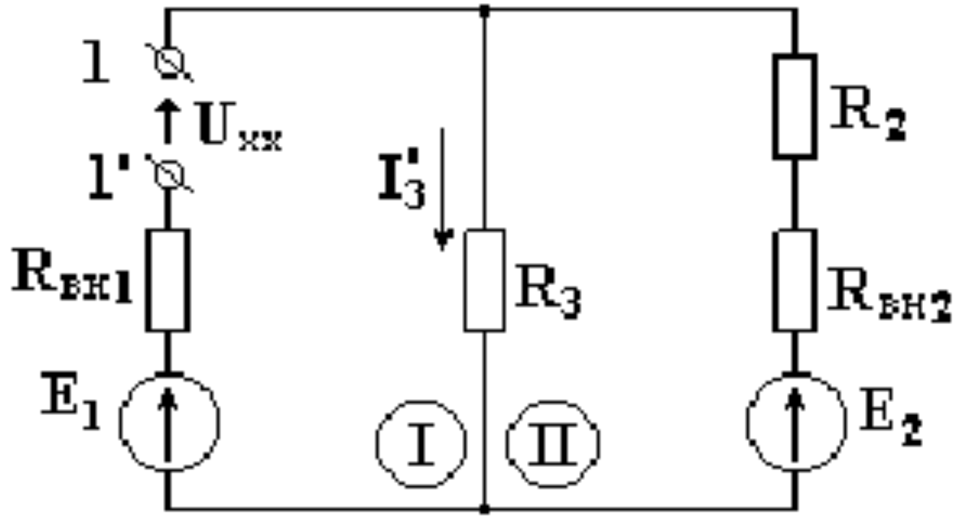


Рисунок 5

В этой схеме ветвь с сопротивлением R_1 разорвана, это сопротивление удалено из схемы.

На разомкнутых зажимах появляется напряжение холостого хода.

Для определения этого напряжения составим уравнение для первого контура по второму закону Кирхгофа:

$$E_1 = U_{xx} + R_3 \cdot I_3' \ ,$$

откуда находим:

$$U_{xx} = E_1 - R_3 \cdot I_3' \ .$$

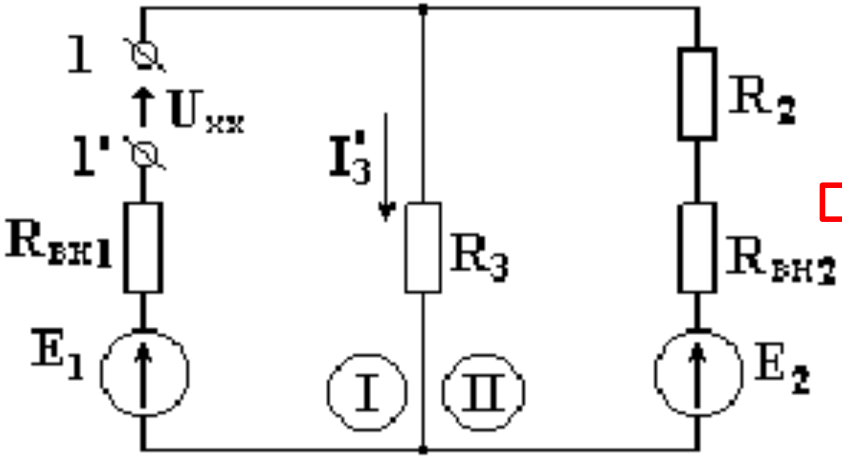
где $I_3' = I_2'$ определяется из уравнения, составленного по второму закону Кирхгофа для второго контура:

$$I_3' = I_2' = \frac{E_2}{R_{вх} + R_2 + R_3} \ .$$

Так как первая ветвь разорвана, то ЭДС E_1 не создает ток.

Падение напряжения на сопротивлении $\mathrm{R}_{вн1}$ отсутствует.

На рисунке 6 изображена схема, предназначенная для определения входного сопротивления.



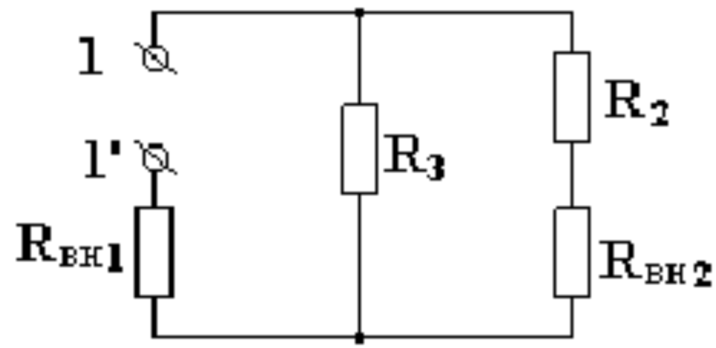


Рисунок 6

Из исходной схемы удалены все источники (E_1 и E_2), т.е. эти ЭДС мысленно закорочены.

Входное сопротивление $R_{вх}$ определяют, свертывая схему относительно зажимов 1-1‘:

$$R_{вх} = R_{вн1} + \frac{(R_{вн2} + R_2)\cdot R_3}{R_{вн2} + R_2 + R_3}$$

$$R_{вх} = R_{вн1} + \frac{(R_{вн2} + R_2) \cdot R_3}{R_{вн2} + R_2 + R_3}$$

$$I'_3 = I'_2 = \frac{E_2}{R_{вх} + R_2 + R_3}$$

$$U_{xx} = E_1 - R_3 \cdot I'_3$$

$$\boxed{I_1 = \frac{U_{xx}}{R_{вх} + R_1}}$$

Баланс мощностей

Закон Джоуля–Ленца: для пассивных участков цепи постоянного тока потребляемая энергия $\boldsymbol{W}$ **:**

$$W = U \cdot I \cdot t = P \cdot t,$$

где $\boldsymbol{U}$ – напряжение на пассивном участке, I – ток,

$\boldsymbol{t}$ – время, $\boldsymbol{P}$ - мощность.

Единицы измерения – ватт в секунду [Вт·с] или Джоуль [Дж] .

Мощность приемников, потребляемая на участке цепи (единицы измерения – ватт [Вт]) равна:

$$P_{пр} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Мощность, вырабатываемая источником ЭДС равна:

$$P_{ист} = E \cdot I.$$

Если ЭДС *E* и ток на схеме направлены в разные стороны, то мощность источника отрицательна. Это значит, что данный источник не генерирует, а потребляет энергию.

В соответствии с законом сохранения энергии-количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в элементах схемы (приемниках), должно равняться энергии, доставляемой за это же время источниками питания. Этому утверждению соответствует уравнение ***баланса мощностей***:

$$\boxed{P_{пр} = P_{ист}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k^2 \cdot R_k = \sum_{k=1}^{m} E_k \cdot I_k}$$

Принцип суперпозиции (метод наложения)

Метод наложения основан на физическом принципе независимости действия сил в линейных системах.

В этом случае расчет сложной цепи с несколькими ЭДС сводят к расчету нескольких цепей с одним источником питания.

В основе метода лежит

Принцип суперпозиции (наложения): ток в любой ветви сложной электрической цепи, содержащей несколько ЭДС, может быть найден как алгебраическая сумма токов в этой ветви от действия каждой ЭДС в отдельности.

Потенциальная диаграмма

Спасибо

за внимание!