Основные приемы решения задач о делимости чисел

Л.М. Самойлов,
д.ф.-м.н., член жюри всероссийской олимпиады школьников по математике

Разложение на простые множители

1. Петя хочет записать по кругу 2017 натуральных чисел так, чтобы для каждых двух соседних чисел частное от деления большего на меньшее было простым числом. Возможно ли это?

2. Докажите, что по кругу можно расставить 8 чисел так, чтобы выполнялось условие: любые стоящие рядом числа не взаимно просты, а любые стоящие не рядом числа -- взаимно просты.

3. Приведите пример 3-х натуральных чисел, не делящихся друг на друга, но чтобы при этом произведение любых двух чисел делилось бы на третье число. То же самое, но числа >100.

4. Докажите, что 100! не является квадратом целого числа.

Разложение на простые множители

5. Каково наименьшее натуральное число n такое, что n! делится на 990?

6. К числу, написанному на доске, разрешается прибавлять одну треть или одну седьмую его текущего значения. Докажите, что число когда-нибудь перестанет быть целым. (Вопрос. Как меняется разложение числа на множители при одной операции?)

7. Числа от 1 до 10 разбили на две группы так, что произведение чисел в первой группе нацело делится на произведение чисел во второй. Какое наименьшее значение может быть у частного от деления первого произведения на второе?

8. Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится на: а) 60; б) 120.

Разложение на простые множители

9. Существуют ли 7 таких натуральных чисел, что ни одно из них не делится ни на одно из остальных, но квадрат каждого из них делится на каждое из остальных?

10. На доске записаны числа 20 и 100. Разрешается дописать на доску произведение любых двух имеющихся на ней чисел. Можно ли такими операциями когда-нибудь получить на доске число 50...0 (2018 нулей)?

11. Решите а) в натуральных; б) в целых числах уравнение m^2 = 2n^2.

Разложение на простые множители

12. В ряд стоят 2017 чисел, произведение любых двух соседних --- квадрат. Докажите, что произведение двух крайних тоже квадрат.

13. Дано 100 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их нельзя расставить по окружности так, чтобы произведение любых двух соседних являлось точным квадратом.

14. Докажите, что существуют такие 100 натуральных чисел, что никакая сумма нескольких различных из них не является квадратом.

Взаимная простота.

Идея 1. $ab \vdots c$, НОД$(b,c)=1$, тогда, $a \vdots c$

Идея 2. ab - квадрат, НОД$(a,b)=1$, тогда a и b – квадраты.

Идея 3. $ab \vdots p$, p - простое, тогда, $a \vdots p$ или $b \vdots p$.

1. Сумма двух натуральных чисел равна 73. Докажите, что их произведение не делится на 73.

2. $56a=65b$. Докажите, что $a+b$ - составное число.

3. Существуют ли натуральные числа x и y, для которых x^2+xy делится на $x+y+1$?

4. Найдите все целых x, при которых x^2+x -- квадрат

Взаимная простота.

5. Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.

6. Найдите все пары простых чисел p и q, обладающие следующим свойством: $7p + 1$ делится на q, а $7q + 1$ делится на p.

7. Перед боем с белогвардейцами у Василия Ивановича и Петьки было поровну патронов. Василий Иванович израсходовал в бою в 8 раз меньше патронов, чем Петька, а осталось у него в 9 раз больше патронов, чем у Петьки. Докажите, что изначальное количество патронов у Василия Ивановича делилось на 71.

8. При каких натуральных n число $n^2 - 1$ является степенью простого числа?

9. Простые числа a, b, c таковы, что ab+a+b делится на c, bc+b+c делится на a, ac+a+c делится на b. Докажите, что среди чисел a, b, c есть одинаковые.

$a \vdots bc$, тогда $a \vdots b$

1. Найдите все простые p, q, r, для которых $pq+qr+rp \vdots pqr$.

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых число $a^{2018}+b$ делится на ab.

$a \vdots b$, тогда $a+b \vdots b$, $a-b \vdots b$

$a \vdots b$, тогда $a \geq b$ (a,b – натуральные)

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число 1978^n-1 не делится на число 1000^n-1.

2. Натуральные числа a и b таковы, что $ab-1$ делится на $b+1$. Докажите, что $a \geq b$.

3. Числа a, b, n -- натуральные. Известно, что при всех n $an+1$ делится на $bn+1$. Докажите, что $a=b$.

4. Найдите все натуральные n, для которых 3^n+5^n делится на $3^{n-1}+5^{n-1}$.

$a \vdots b$, тогда $a+b \vdots b$, $a-b \vdots b$

$a \vdots b$, тогда $a \geq b$ (a,b – натуральные)

5. Натуральные числа x, y таковы, что $x^2y+1 \vdots xy-1$. Найдите все такие числа x и y.

6. Различные натуральные числа a, b таковы, что a^2+ab+1 делится b^2+ab+1. Докажите, что a=b.

7. Различные натуральные числа a, b таковы, что $a^2+b \vdots b^2+a$. Докажите, что b^2+a -- составное число.

$a>b$, тогда $a \geq b+1$

1. Докажите, что не существует таких натуральных m и n, что m^2+n и n^2+m -- квадраты.

2. Решите уравнение в натуральных числах n!+5(m!)=k!.

Между последовательными квадратами нет квадратов

1. Найдите все натуральные n такие, что n^2+3n -- точный квадрат.

2. Найдите все решения уравнения $m^3+m^2+6=n^3$ в натуральных числах.

Рассмотрение простого множителя

1. 37 последовательных чисел разбили на две непустые группы. Затем перемножили числа в каждой группе, и сложили произведения. Могло ли получиться в сумме 2013! ?

2. НОД (a,b)=1. Докажите, что НОД (ab, a+b)=1.

Докажите, что если (n-1)!+1 делится на n, то n --- простое число.

3. Существуют ли пять таких двузначных составных чисел, что каждые два из них взаимно просты?

4. Взяли 10 чисел, и посчитали всех их попарные НОДы. Могли ли получиться все числа от 1 до 45?

Использование определений.

1. У каждого из детей в одном кармане пряников в 7 раз больше, чем в другом. Может ли у них в сумме быть 500 пряников?

2. Найдите все такие натуральные числа m, n, что $2n-1 \vdots m$, $2m-1 \vdots n$.

3. Дано натуральное число b. Найдите наименьшее натуральное число $a>b$ такое, что НОД$(a,b)=1$ и a^2+a+b делится на b^2.

Деление с остатком.

1. Число а кратно 3. Может ли остаток при делении а на 12 равняться 2?

2. Натуральное число *А* при делении на 1981 дало в остатке 35, при делении на 1982 оно дало в остатке также 35. Каков остаток от деления числа *А* на 14?

3. Маша поделила некоторое натуральное число N с остатком на 29 и получила, что остаток равен неполному частному. Потом она поделила число N с остатком на 38 и снова остаток оказался равен неполному частному. Напишите через пробел все варианты, чему могло равняться число N.

4. Остаток от деления одного натурального числа на 11 равен остатку от деления другого на 13, а остаток от деления первого числа на 13 равен остатку от деления второго на 11. Докажите, что остаток от деления суммы этих чисел на 143 не превосходит 20.

Спасибо за внимание!