

# Проблемы энерго- и ресурсосбережения

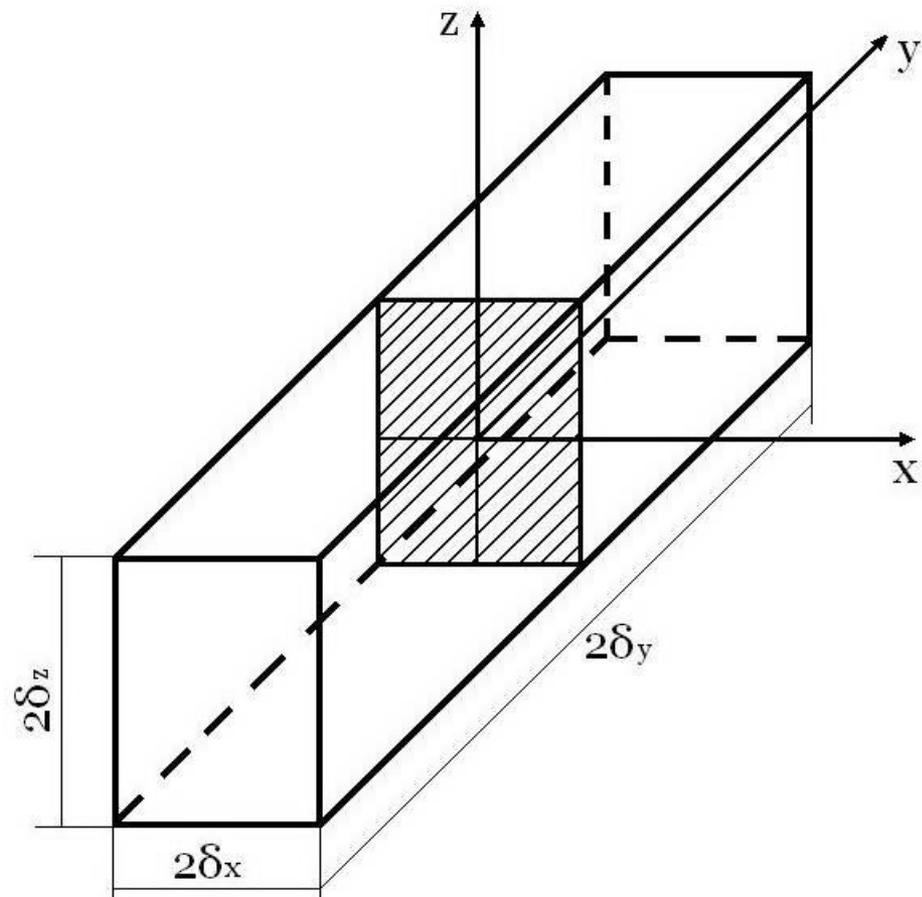
Охлаждение (нагревание) тел конечных размеров

# Нагрев параллелепипеда

Заготовка (параллелепипед) с размерами  $2\delta_x 2\delta_y 2\delta_z$  помещена в среду, имеющую температуру  $t_{жс}$ . Условия нагрева заготовки во всех направлениях одинаковые (коэффициент теплоотдачи  $\alpha = const$ ).

# Нагрев параллелепипеда

Расчетная схема



# Нагрев параллелепипеда

Дифференциальное уравнение температурного поля при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

# Начальные условия

Считаем, что в начале процесса температура в заготовке распределена равномерно, тогда начальные условия:

$$t(x, y, z, \tau = 0) = t_0 \quad (2)$$

# Граничные условия

Из условий геометрической и тепловой симметрии  
следует:

$$\frac{\partial t(0, y, z, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(x, 0, z, \tau)}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial t(x, y, 0, \tau)}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

# Граничные условия

Теплообмен на поверхности заготовки подчиняется закону Ньютона-Рихмана:

$$\boxtimes \frac{\partial t(\pm\delta_x, y, z, \tau)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ t(\pm\delta_{\text{же}}, y, z, \tau) - t \right]; \quad (6)$$

$$\boxtimes \frac{\partial t(x, \pm\delta_y, z, \tau)}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ t(x, \pm\delta_{\text{же}}, z, \tau) - t \right]; \quad (7)$$

$$\boxtimes \frac{\partial t(x, y, \pm\delta_z, \tau)}{\partial z} = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ t(x, y, \pm\delta_{\text{же}}, \tau) - t \right]; \quad (8)$$

# Решение

Решение системы (1)-(8) в безразмерном виде можно представить как *произведение трех решений для неограниченной пластины*, так как заготовка (параллелепипед) образована путем пересечения трех взаимноперпендикулярных неограниченных пластин

# Температура

$$\theta(x, y, z, \tau) = \theta(x, \tau)\theta(y, \tau)\theta(z, \tau),$$

где

$$\theta(x, y, z, \tau) = \frac{t(x, y, z, \tau) - t_{\text{жс}}}{t_0 - t_{\text{жс}}}$$

# Температура

$$\theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}};$$

$$\theta(y, \tau) = \frac{t(y, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}};$$

$$\theta(z, \tau) = \frac{t(z, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}};$$

Следовательно:

$$\theta(x, y, z, \tau) = \frac{[\theta(x, \tau) - t_{жс}] [\theta(y, \tau) - t_{жс}] [\theta(z, \tau) - t_{жс}]}{(t_0 - t_{жс})^3};$$

# Температура

Решение задачи о равномерном нагреве пластины  
ИЗВЕСТНО:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{nx}}{\mu_{nx} + \sin \mu_{nx} \cos \mu_{nx}} \cos \left( \mu_{nx} \frac{x}{\delta_x} \right) \exp(-\mu_{nx}^2 a \tau / \delta_x^2);$$

$$\theta(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{ny}}{\mu_{ny} + \sin \mu_{ny} \cos \mu_{ny}} \cos \left( \mu_{ny} \frac{y}{\delta_y} \right) \exp(-\mu_{ny}^2 a \tau / \delta_y^2);$$

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{nz}}{\mu_{nz} + \sin \mu_{nz} \cos \mu_{nz}} \cos \left( \mu_{nz} \frac{z}{\delta_z} \right) \exp(-\mu_{nz}^2 a \tau / \delta_z^2);$$

# Характеристические уравнения

Значения  $\mu_{nx}, \mu_{ny}, \mu_{nz}$  определяются из характеристических уравнений:

$$\frac{\mu_{nx}}{Bi_x} = \operatorname{ctg} \mu_{nx},$$

$$\frac{\mu_{ny}}{Bi_y} = \operatorname{ctg} \mu_{ny},$$

$$\frac{\mu_{nz}}{Bi_z} = \operatorname{ctg} \mu_{nz}$$

# Температура

Решение задачи можно выразить через безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, \tau) = & \\ = F_x(\mu_n, Bi_x, Fo_x, X) \cdot & \\ \cdot F_y(\mu_n, Bi_y, Fo_y, Y) \cdot & \\ \cdot F_z(\mu_n, Bi_z, Fo_z, Z), & \end{aligned}$$

# Безразмерные величины

где:

$$Bi_x = \frac{\alpha \delta_x}{\lambda};$$

$$Fo_x = \frac{\alpha \tau}{\delta_x^2};$$

$$X = \frac{x}{\delta_x};$$

$$Bi_y = \frac{\alpha \delta_y}{\lambda};$$

$$Fo_y = \frac{\alpha \tau}{\delta_y^2};$$

$$Y = \frac{y}{\delta_y};$$

$$Bi_z = \frac{\alpha \delta_z}{\lambda};$$

$$Fo_z = \frac{\alpha \tau}{\delta_z^2};$$

$$Z = \frac{z}{\delta_z};$$

# Средняя температура

Средняя температура заготовки (параллелепипеда) определяется также как произведение трех температур для бесконечной пластины:

$$\bar{\theta}(\tau) = \bar{\theta}_x(\tau) \bar{\theta}_y(\tau) \bar{\theta}_z(\tau),$$

$$\bar{\theta}_x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_{nx}}{\mu_{nx}^2 + \mu_{nx} \sin \mu_{nx} \cos \mu_{nx}} \exp(-\mu_{nx}^2 a \tau / \delta_x^2);$$

$$\bar{\theta}_y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_{ny}}{\mu_{ny}^2 + \mu_{ny} \sin \mu_{ny} \cos \mu_{ny}} \exp(-\mu_{ny}^2 a \tau / \delta_y^2);$$

$$\bar{\theta}_z(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_{nz}}{\mu_{nz}^2 + \mu_{nz} \sin \mu_{nz} \cos \mu_{nz}} \exp(-\mu_{nz}^2 a \tau / \delta_z^2)$$

# Средняя температура

где:

$$\bar{\theta}_x(\tau) = \frac{\bar{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

$$\bar{\theta}_y(\tau) = \frac{\bar{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

$$\bar{\theta}_z(\tau) = \frac{\bar{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

# Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Пусть стержень имеет ограниченные размеры в направлении осей  $x$  и  $y$ , а в направлении оси  $z$  он неограничен:  $\partial t / \partial z = 0$  (теплообмен в направлении оси  $z$  отсутствует).

Данное тело можно представить как результат пересечения двух неограниченных пластин во взаимно перпендикулярном направлении.

# Охлаждение длинного прямоугольного стержня

Дифференциальное уравнение температурного поля при отсутствии внутренних источников теплоты имеет вид :

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

# Начальные условия

Считаем, что в начале процесса температура в стержне распределена равномерно, тогда начальные условия:

$$t(x, y, \tau = 0) = t_0 \quad (2)$$

# Граничные условия

Из условий геометрической и тепловой симметрии следует:

$$\frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

# Граничные условия

Теплообмен на поверхности стержня подчиняется закону Ньютона-Рихмана:

$$\boxtimes \frac{\partial t(\pm\delta_x, y, \tau)}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ t(\pm\delta_{xe}, y, \tau) - t \right]; \quad (5)$$

$$\boxtimes \frac{\partial t(x, \pm\delta_y, \tau)}{\partial y} = \frac{\alpha}{\lambda} \left[ t(x, \pm\delta_{ye}, \tau) - t \right]; \quad (6)$$

# Температура

$$\theta(x, y, \tau) = \theta(x, \tau)\theta(y, \tau),$$

где

$$\theta(x, y, \tau) = \frac{t(x, y, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}$$

# Температура

$$\theta(x, \tau) = \frac{t(x, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}}; \quad \theta(y, \tau) = \frac{t(y, \tau) - t_{жс}}{t_0 - t_{жс}};$$

Следовательно:

$$\theta(x, y, \tau) = \frac{[t(x, \tau) - t_{жс}] [t(y, \tau) - t_{жс}]}{(t_0 - t_{жс})^2};$$

# Температура

Решение задачи о равномерном нагреве стержня  
известно:

$$\theta(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{nx}}{\mu_{nx} + \sin \mu_{nx} \cos \mu_{nx}} \cos \left( \mu_{nx} \frac{x}{\delta_x} \right) \exp(-\mu_{nx}^2 \alpha \tau / \delta_x^2);$$

$$\theta(y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_{ny}}{\mu_{ny} + \sin \mu_{ny} \cos \mu_{ny}} \cos \left( \mu_{ny} \frac{y}{\delta_y} \right) \exp(-\mu_{ny}^2 \alpha \tau / \delta_y^2);$$

# Характеристические уравнения

Значения  $\mu_{nx}, \mu_{ny}$  определяются из характеристических уравнений:

$$\frac{\mu_{nx}}{Bi_x} = \operatorname{ctg} \mu_{nx},$$

$$\frac{\mu_{ny}}{Bi_y} = \operatorname{ctg} \mu_{ny},$$

# Температура

Решение задачи можно выразить через  
безразмерные величины:

$$\theta(x, y, \tau) =$$
$$= F_x(\mu_n, Bi_x, Fo_x, X) \cdot$$
$$\cdot F_y(\mu_n, Bi_y, Fo_y, Y),$$

# Безразмерные величины

где:

$$Bi_x = \frac{\alpha \delta_x}{\lambda}; \quad Fo_x = \frac{a\tau}{\delta_x^2}; \quad X = \frac{x}{\delta_x};$$

$$Bi_y = \frac{\alpha \delta_y}{\lambda}; \quad Fo_y = \frac{a\tau}{\delta_y^2}; \quad Y = \frac{y}{\delta_y};$$

# Средняя температура

Средняя температура стержня определяется также как произведение трех температур для бесконечной пластины:

$$\bar{\theta}(\tau) = \bar{\theta}_x(\tau) \bar{\theta}_y(\tau),$$

$$\bar{\theta}_x(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_{nx}}{\mu_{nx}^2 + \mu_{nx} \sin \mu_{nx} \cos \mu_{nx}} \exp(-\mu_{nx}^2 a \tau / \delta_x^2);$$

$$\bar{\theta}_y(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin^2 \mu_{ny}}{\mu_{ny}^2 + \mu_{ny} \sin \mu_{ny} \cos \mu_{ny}} \exp(-\mu_{ny}^2 a \tau / \delta_y^2);$$

# Средняя температура

где:

$$\overline{\theta}_x(\tau) = \frac{\overline{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

$$\overline{\theta}_y(\tau) = \frac{\overline{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Пусть внутри источник теплоты отсутствует:  $q_v = 0$

Пусть 
$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0$$

Тогда дифференциальное уравнение температурного поля примет вид:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Избыточная температура:  $\vartheta(r, z, \tau) = t(r, z, \tau) - t_{жс}$

Тогда:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right)$$

# Условия однозначности

$$\mathfrak{G}(r, z, 0) = f(r) - t_{\text{жс}} = F(r, z);$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}(0, z, \tau)}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial \mathfrak{G}(r, 0, \tau)}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}(r_0, z, \tau)}{\partial r} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathfrak{G}(r_0, z, \tau);$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}(r, z_0, \tau)}{\partial z} = -\frac{\alpha}{\lambda} \mathfrak{G}(r, z_0, \tau)$$

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Ограниченный цилиндр можно представить как результат пересечения бесконечного цилиндра с бесконечной пластиной. Тогда решение задачи в безразмерном виде можно представить, как произведение решений для неограниченной пластины и неограниченного цилиндра

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Температура:  $\theta(r, z, \tau) = \theta(r, \tau)\theta(z, \tau)$ ;

$$\theta(z, Fo_z) = \frac{\mathfrak{G}(z, \tau)}{\mathfrak{G}_0} = D_1 \exp(-\mu_{nz}^2 Fo_z) \cos(\mu_{nz} Z),$$

$$\begin{aligned} \theta(r, \tau) &= \frac{\mathfrak{G}(r, \tau)}{\mathfrak{G}_0} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_1(\mu_{nr})}{\mu_{nr} [J_0^2(\mu_{nr}) + J_1^2(\mu_{nr})]} J_0(\mu_{nr} R) \exp(-Fo_r \mu_{nr}^2) \end{aligned}$$

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Характеристические уравнения:

$$\frac{\mu_{nz}}{Bi_z} = \mu \operatorname{tg} \mu; \quad nz$$

$$\frac{\mu_{nr}}{Bi} = \frac{J_0(\mu_{nr})}{J_1(\mu_{nr})};$$

# Охлаждение цилиндра конечной длины

Температура:

$$\theta(r, z, \tau) = \frac{[t(r, \tau) - t_{\text{жс}}][t(z, \tau) - t_{\text{жс}}]}{(t_0 - t_{\text{жс}})^2};$$

$$\theta(r, z, \tau) = \frac{t(r, z, \tau) - t_{\text{жс}}}{t_0 - t_{\text{жс}}};$$

$$\theta(r, \tau) = \frac{t(r, \tau) - t_{\text{жс}}}{t_0 - t_{\text{жс}}}; \theta(z, \tau) = \frac{t(z, \tau) - t_{\text{жс}}}{t_0 - t_{\text{жс}}};$$

# Температура

Решение задачи можно выразить через  
безразмерные величины:

$$\begin{aligned} \theta(r, z, \tau) &= \\ &= F_r(\mu_{nr}, Bi_r, Fo_r, R) \cdot \\ &\cdot F_z(\mu_{nz}, Bi_z, Fo_z, Z), \end{aligned}$$

# Безразмерные величины

где:

$$Bi_r = \frac{\alpha r_0}{\lambda}; \quad Fo_r = \frac{\alpha \tau}{r_0^2}; \quad R = \frac{r}{r_0};$$
$$Bi_z = \frac{\alpha \delta_z}{\lambda}; \quad Fo_z = \frac{\alpha \tau}{\delta_z^2}; \quad Z = \frac{z}{\delta_z}$$

# Средняя температура

Средняя температура цилиндра конечных размеров определяется также как произведение двух температур для бесконечной пластины и бесконечного цилиндра:

$$\bar{\theta}(\tau) = \bar{\theta}_r(\tau) \bar{\theta}_z(\tau),$$

$$\bar{\theta}_r(\tau) = \frac{\bar{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}}; \quad \bar{\theta}_z(\tau) = \frac{\bar{t}_{жс}(\tau) - t}{t_0 - t_{жс}};$$

# Вопросы к экзамену

1. Охлаждение параллелепипеда.
2. Охлаждение длинного прямоугольного стержня.
3. Охлаждение цилиндра конечной длины.