Моделирование конфликтных ситуаций в экономике с применением математической теории игр

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

1.Задачи теории игр в экономике.

Большинство задач финансово-экономической сферы сводится к необходимости принятия решения.

Проблема в том, что принимать решения приходится в условиях неопределенности.

Неопределенность связана:

- с сознательной деятельностью конкурентов;

- с риском, в котором необходимо принять решение;

- неопределенность целей задачи и др.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

В условиях определенности теоретические и практические выводы носят однозначный характер.

В условиях частичной или полной неопределен-ности результаты анализа не обладают однозначностью.

Математизация экономических задач о принятии решений в условиях неопределенности, привело к развитию соответствующих методов и моделей, в основе которых лежит теория игр.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

2. **Основные понятия теории игр.**

Конфликтная ситуация – ситуация, в которой сталкиваются противоположные интересы противоборствующих сторон.

Черты конфликтной ситуации:

- наличие заинтересованных сторон
- наличие набора возможных действий у каждой из сторон
- наличие своих интересов у каждой стороны.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой.**
- **Теория игр** – раздел теории исследования операций, который занимается моделями конфликтных ситуаций.
- Игровые математические модели имеют широкое практическое применение в экономике, политике, биологии, военном деле и т.п.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- 2.1. Терминология теории игр.
  - **Игроки** – заинтересованные стороны в игре
  - **Коалиция** - объединение игроков
    - Коалиции действия
    - Коалиции интересов
  - **Стратегия** – любое возможное действие игрока

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

Парная игра – игра, в которой принимают участие два противника (игрока)

- **Множественная игра** – игра с числом участников более двух.
- **Ситуация (исход игры)** – состояние, в котором оказываются игроки после очередного хода.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

Предполагается, что игра происходит по определенным правилам (без этого не возможна формализация задачи).

Правила - система условий, которые описывают:

-возможные действия каждого из игроков

- объем информации, которую может получить каждая из сторон о возможных действиях противника

- исход (результат) игры после каждой совокупности «ходов» противника

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

Будем предполагать, что каждый из участников игры обладает своим набором чистых стратегий:
$S^c_A=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$, $S^c_B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$

В условиях конфликта каждый игрок делает свой ход, т.е. выбирает одну из своих возможных стратегий

Сделав ход, игроки оказываются в ситуации $X_{ij}=\{A_i, B_j\}$.

Правила игры могут запрещать отдельные ситуации, которые называются «запрещенными».

Если в процессе игры возникает запрещенная ситуация, то игра считается несостоявшейся.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- **Функция выигрыша** – степень удовлетворения интересов игрока (F_A).
- Функция выигрыша определена на множестве ситуаций (S^c_A, S^c_B) и ставит в соответствие каждой ситуации X_{ij} некоторое число $F(X_{ij})$, которое называется выигрышем игрока A в ситуации X_{ij}.

- **Игра** – выбор игроками своих возможных стратегий и получении в сложившейся ситуации своего выигрыша.
- **Игра** происходит по определенным правилам.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- **Цель теории игр** – выработка рекомендаций для удовлетворитель-ного поведения игроков в конфликте и выявления для каждого из них **оптимальной стратегии**.

- **Оптимальная стратегия –** такая стратегия, которая при многократном повторении игры гарантирует игроку максимальный возможный средний выигрыш.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- **Замечания:**
  - Выбор оптимальной стратегии базируется на принципе разумности каждого игрока, т.е. поведение каждого из них направлено на противодействие другому.
  - Оптимальность опирается на некоторый критерий. Поэтому возможны случаи, когда стратегия является оптимальной в смысле одного критерия и не оптимальной в смысле другого.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

3. Игры двух сторон с нулевой суммой выигрыша.

Определение. Игры, в которых каждый из игроков преследует противоположные интересы называются антагонистическими.

В антагонистической игре один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Следовательно: $F_A(A_iB_j) = - F_B(B_jA_i)$ или

$$F_A(A_iB_j) + F_B(B_jA_i) = 0$$

Антагонистическая парная игра определяется совокупностью $\{S^c_A, S^c_B, F_A\}$

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

4. **Матрица выигрышей**.

Пусть игроки А и В имеют наборы стратегий $S^c_A=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$ и $S^c_B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$.
Ситуация $X_{ij}=(A_i, B_j)$ полностью определяет выигрыш игрока А, который равен действительному числу: $F(A_iB_j)=a_{ij}$. Это число - одновременно проигрыш игрока В.

Из чисел a_{ij} можно сформировать матрицу $A=\{a_{ij}\}$, в которой номер строки - номер стратегии игрока А, а номер столбца – номер стратегии игрока В.

Полученная матрица называется матрицей выигрыша игрока А

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

4. Матрица выигрыша (Продолжение)

$A =$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	….	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}
…..	….	….	….	….
A_m	a_{m1}	a_{m2}	….	a_{mn}

Аналогичным образом можно построить матрицу выигрышей игрока В.

При этом **$B=-A^T$**. Таким образом матрица **В** полностью определяется матрицей **А.**

Матрица **А** называется также платежной матрицей или матрицей игры.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- **Замечания.**
  - Матрица игры существенно зависит от упорядочивания множеств S^c_A и S^c_B. При иной нумерации стратегий матрица окажется другой. Т.е. одна и та же игра может быть представлена различными матрицами. Но функция F_A остается однозначно определенной.
  - Построение матрицы игры является весьма сложной задачей. Однако, всякую конечную игру можно привести к матричной форме.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

- **Пример построения платежной матрицы.**

<u>Задача.</u> Две фирмы А и В производят один и тот же сезонный товар, который поступает на рынок в моменты времени i и j. Цель фирмы В разорить фирму А и стать монополистом на рынке, пойдя на некоторые убытки.

Товар обладает следующим свойством. Чем дольше он находится в производстве, тем выше его качество.

Способ борьбы один: поставлять товар более высокого качества.

Для разорения фирмы А необходимо минимизировать ее доходы.

<u>Необходимо.</u> Построить матрицу игры А для n = 4 при условии, что доход равен С в единицу времени.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

Задача. (Решение).

Стороны А и В имеют противоположные интересы. Конфликт антагонистический.

Фирма обладает набором стратегий $S^c_A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ поставки товара в момент времени i, а фирма В набором $S^c_B=\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ поставки товара в момент времени j.

Возможны три варианта сравнения моментов поставки товара: $i<j$, $i=j$, $i>j$.

$$F_A(i,j)=\begin{cases} c*(j-i) & \text{при} \quad i<j \\ c*(n-i+j)/2 & \text{при} \quad i=j \\ c*(n-i+1) & \text{при} \quad i>j \end{cases}$$

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

<u>Задача.</u> Решение (Продолжение)

В результате для n = 4 получим матрицу:

A=

$A_i \backslash B_j$	$B_1=1$	$B_2=2$	$B_3=3$	$B_4=4$
$A_1=1$	$a_{11}=2c$	$a_{12}=c$	$a_{13}=2c$	$a_{14}=3c$
$A_2=2$	$a_{21}=3c$	$a_{22}=1.5c$	$a_{23}=c$	$a_{24}=2c$
$A_3=3$	$a_{31}=2c$	$a_{32}=2c$	$a_{33}=c$	$a_{34}=c$
$A_4=4$	$a_{41}=c$	$a_{42}=c$	$a_{43}=c$	$a_{44}=0.5c$

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

5. Максиминные и минимаксные стратегии.

Пусть имеем парную антагонистическую игру между игроками A и B: $S^c_A=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$, $S^c_B=\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$, $F_A(i,j)= a_{ij}$.

Если игрок **A** выбирает одну из своих стратегий (A_i), то его выигрыш – одно из значений $a_{ij,}$ лежащее в строке i.

Предполагаем, что игрок A крайне осторожен, т.е. он исходит из того, что игрок B в ответ выберет наилучшую из своих стратегий, при которой выигрыш игрока A будет минимальным.

Пусть **α_i** = min(a_{ij}) при 1 a_{ij}. при 1≤ J ≤n для всех 1≤ I ≤m

α_i – показатель эффективности стратегии A_i.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

5. **Максиминные и минимаксные стратегии.**

Продолжая действовать разумно, игрок А выберет ту стратегию, при которой показатель эффективности $\boldsymbol{\alpha}_i$ принимает максимальное значение:

$\boldsymbol{\alpha} = \max(\boldsymbol{\alpha}_i) = \max \min(a_{ij})$ при $1 \le J \le n$ и $1 \le i \le m$.

Данный **принцип** выбора стратегии называется **максиминным**.

α – максимин стратегий игрока А.

S_A^{maxmin} – множество максиминных стратегий игрока А.

Если игрок А выбирает одну из максиминных стратегий A_i^{maxmin}, то его выигрыш будет $a_i^{maxmin}{}_k \ge \boldsymbol{\alpha}$ при любой стратегии игрока **В**.

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

5. **Максиминные и минимаксные стратегии.**

С точки зрения игрока **B**.

Играя разумно, игрок B понимает, что для его стратегий B_j выигрыши расположены в столбце матрицы F_A: a_{ji}.

Максимальный выигрыш игрока A есть:

$$\beta_j = \max(a_{ji}) \text{ при } 1 \le i \le m$$

Интерес игрока B в том, чтобы выбрать такую стратегию, при которой игрок A будет иметь минимальный выигрыш:

$$\beta = \min(\beta_j) = \text{minmax}(a_{ji})$$

Это минимаксный принцип.

β – минимакс стратегий игрока **B.**

$S_B^{minimax}$ – множество минимаксных стратегий игрока **B.**

α – нижняя граница игры.

β – верхняя граница игры.

$$\alpha \le \beta$$

Моделирование конфликтных ситуаций в экономике

5. Максиминные и минимаксные стратегии.

Замечание. α и β могут быть любыми действительными числами. Если α <0 термин проигрыш не употребляется.

Пример. Найти верхнюю и нижнюю границы игры и максиминную и минимаксную стратегии игроков А и В.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	-3	4	4	-3
A_2	1	-2	1	-2
A_3	4	4	-2	-2
β_j	4	4	4	4\-2

Т.к.$\alpha_2=\alpha_3$, то стратегии A_2 и A_3 – максиминные стратегии игрока **А**.

У игрока **В** все стратегии минимаксные.