

Физический смысл целевой функции транспортной задачи по критерию стоимости

Выполнила
Студентка группы С-1841
Жаврид Екатерина

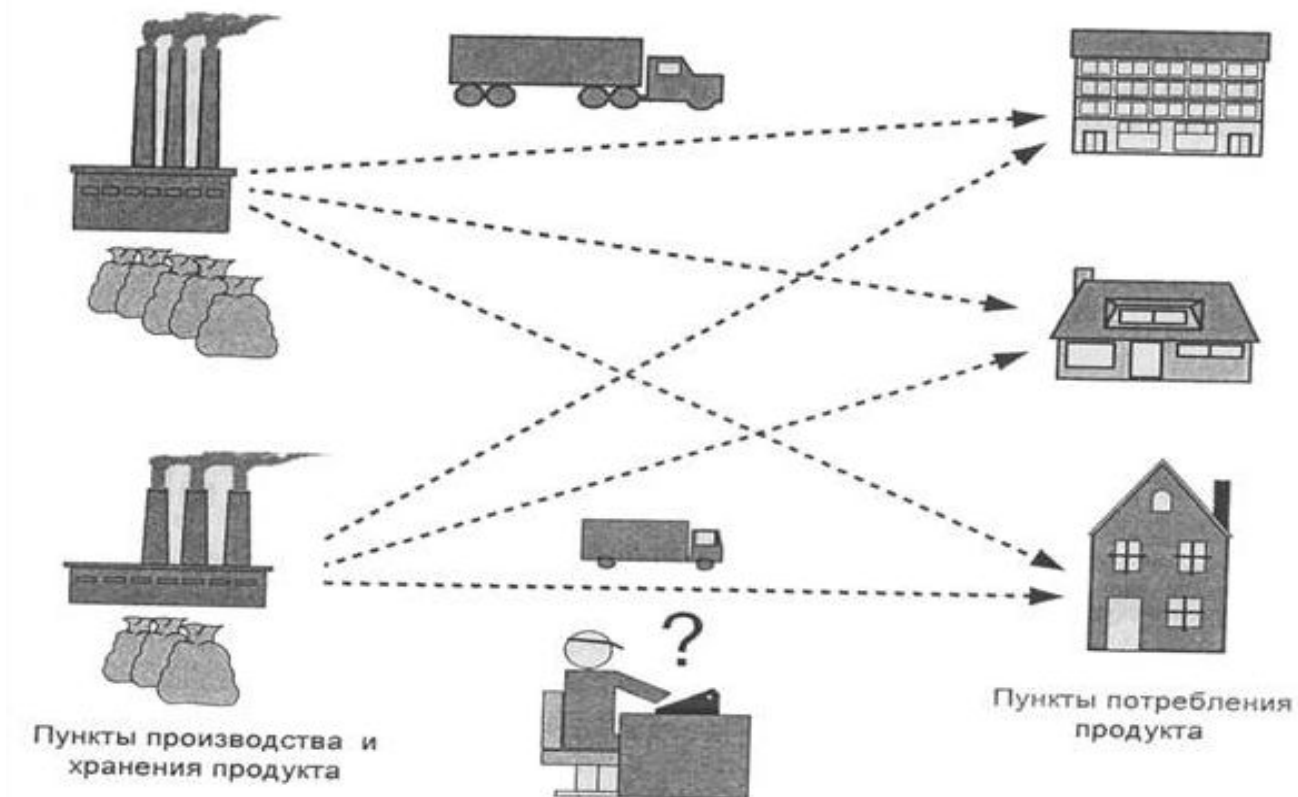
Транспортная задача - это

математическая задача по нахождению оптимального распределения поставок однородного «товара» (груза, вещества) между пунктами отправления и назначения при заданных, численно выраженных затратах (стоимостях, расходах) на перевозку.

- ❖ Проблема была впервые формализована французским математиком Гаспаром Монжем в 1781 году. Прогресс в решении проблемы был достигнут во время Великой Отечественной войны советским математиком и экономистом Леонидом Канторовичем. Поэтому иногда эта проблема называется транспортной задачей Монжа — Канторовича.

Различают два типа транспортных задач:

- по критерию стоимости (план перевозок оптимален, если достигнут минимум затрат на его реализацию);
- по критерию времени (план оптимален, если на его реализацию затрачивается минимум времени).



Однородный груз сосредоточен у m поставщиков в объемах a_1, a_2, \dots, a_m . Данный груз необходимо доставить n потребителям в объемах b_1, b_2, \dots, b_n . Известны c_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) – стоимости перевозки единицы груза от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Требуется составить такой план перевозок, при котором запасы всех поставщиков вывозятся полностью, запросы всех потребителей удовлетворяются полностью и суммарные затраты на перевозку всех грузов минимальны.

	b_1	b_2	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	c_{2n}
....
a_m	c_{m1}	c_{m2}	c_{mn}

Переменными (неизвестными) транспортной задачи являются x_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) – объемы перевозок от каждого i -го поставщика каждому j -му потребителю. Эти переменные могут быть записаны в виде матрицы перевозок

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи в общем случае имеет вид: $Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$

Целевая функция задачи выражает требование обеспечить минимум суммарных затрат на перевозку всех грузов.

$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ - Равенство описывает тот факт, что запасы всех m поставщиков вывозятся полностью.

$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$ - Выражает требование полностью удовлетворить запросы всех n потребителей.

Математическая формулировка транспортной задачи состоит в следующем:

найти переменные $X = (x_{ij}) \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

удовлетворяющие системам ограничений $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$

условиям неотрицательности $x_{ij} \geq 0$
и обеспечивающие минимум целевой функции

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

❖ Суммарные запасы поставщиков должны быть равны суммарным запросам потребителей.

Такая задача называется задачей с **правильным балансом**, а ее модель – **закрытой**. Если же это равенство не выполняется, то задача называется задачей с **неправильным балансом**, а ее модель – открытой.

Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запросам потребителей, т. е. **задача должна быть с правильным балансом**.

$a_i \backslash b_j$	50	70	80
90	9	5	3
110	4	6	8

Решение:

1) Введем переменные задачи (матрицу перевозок):

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

2) Запишем матрицу стоимостей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

3) Целевая функция задачи:

$$Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$$

Данная функция, определяющая суммарные затраты на все перевозки, должна достигать **минимального значения**.

4) Составим систему ограничений.

Сумма перевозок, стоящих в первой строке матрицы X, должна равняться запасам первого поставщика, а сумма перевозок во второй строке матрицы X – запасам второго

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$

Это означает, что запасы всех поставщиков вывозятся

полностью

Суммы перевозок, стоящих в каждом столбце матрицы X , должны быть равны запросам соответствующих потребителей:

$$x_{11} + x_{21} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

Это означает, что запросы потребителей удовлетворяются полностью.

Ответ:

Целевая функция задачи $-Z(X) = 9x_{11} + 5x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23}$

Ограничения:

$$x_{11} + x_{21} = 50$$

$$x_{12} + x_{22} = 70$$

$$x_{13} + x_{23} = 80$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 90$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 110$$