

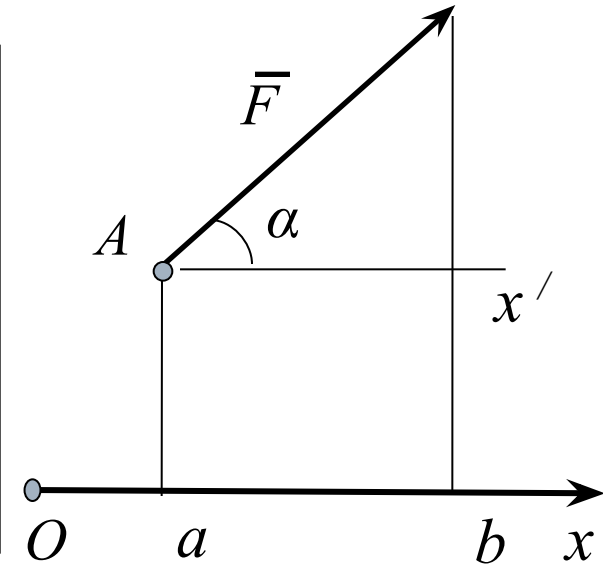
СТАТИКА



2.3. Проекция силы на ось и на плоскость.

Проекция силы на ось

Опр. Проекцией силы (или любого другого вектора) $\vec{F}$ на ось Ox называется алгебраическая величина F_x , равная произведению модуля силы на косинус угла между силой и положительным направлением оси $F_x = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha = ab$.

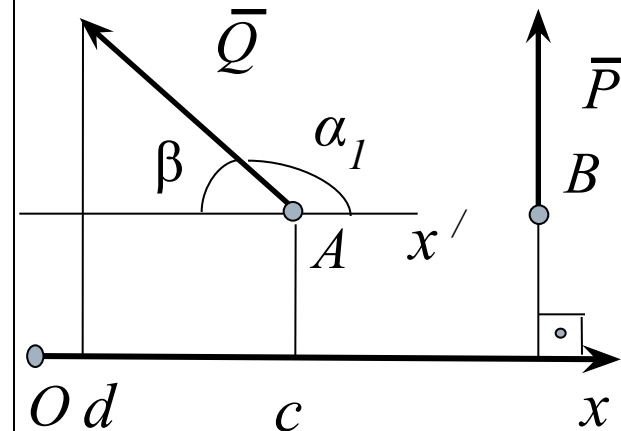


Если угол α острый, то проекция $F_x > 0$, если тупой, то проекция отрицательная, так как

$$Q_x = |\vec{Q}| \cdot \cos \alpha_1 = -|\vec{Q}| \cdot \cos \beta = -dc.$$

Если угол $\alpha = 90^\circ$, то проекция силы на ось равна 0, так как

$$P_x = |\vec{P}| \cdot \cos 90^\circ = 0.$$



Проекция силы на плоскость.

Опр. Проекция силы $\vec{F}$ на плоскость Oxy - вектор $\vec{F}_{xy} = \vec{OB}_1$, заключенный между проекциями начала и конца силы $\vec{F}$ на эту плоскость.

Модуль проекции $|\vec{F}_{xy}| = |\vec{F}| \cdot \cos\theta$.

Проекции силы на ось часто находят методом двойного проектирования, т.е. сначала проектируют силу на плоскость, а затем на оси:

$$F_x = |\vec{F}_{xy}| \cdot \cos\varphi = |\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi,$$

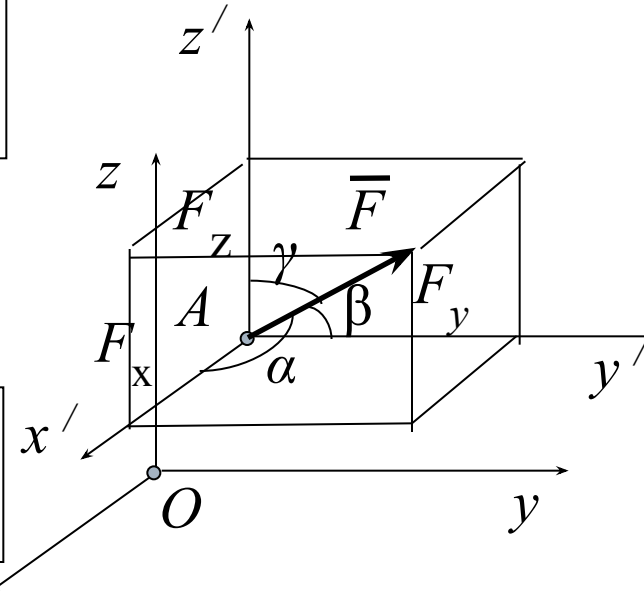
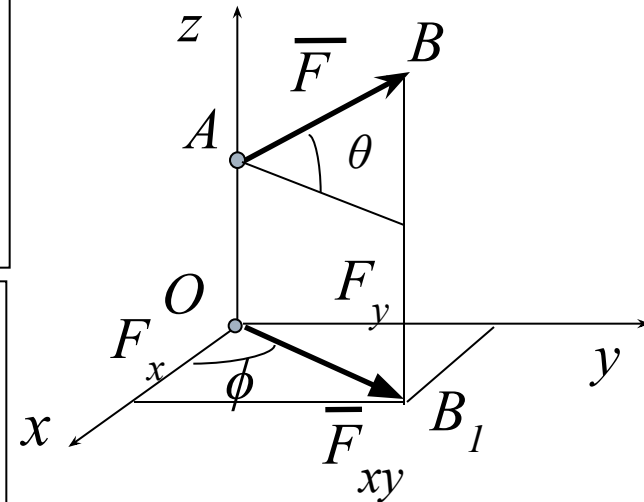
$$F_y = |\vec{F}_{xy}| \cdot \sin\varphi = |\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi.$$

Другой метод – метод прямого проектирования:

$$F_x = |\vec{F}| \cdot \cos\alpha,$$

$$F_y = |\vec{F}| \cdot \cos\beta,$$

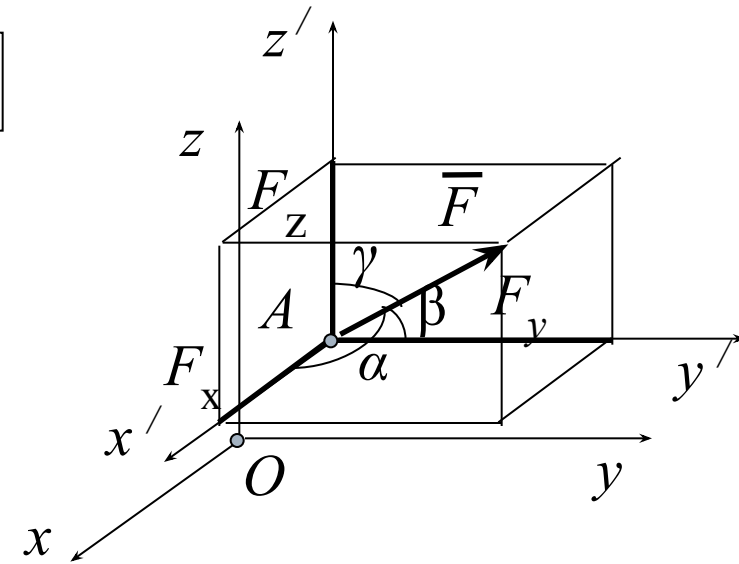
$$F_z = |\vec{F}| \cdot \cos\gamma.$$



2.4. АНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ЗАДАНИЯ И СЛОЖЕНИЯ СИЛ

Аналитический способ задания сил

Утверждение. Для того чтобы задать силу аналитически достаточно задать ее проекции на оси координат.



А) Пространственный случай.

Пусть заданы проекции силы F на оси координат F_x, F_y, F_z , модуль силы определится в виде:

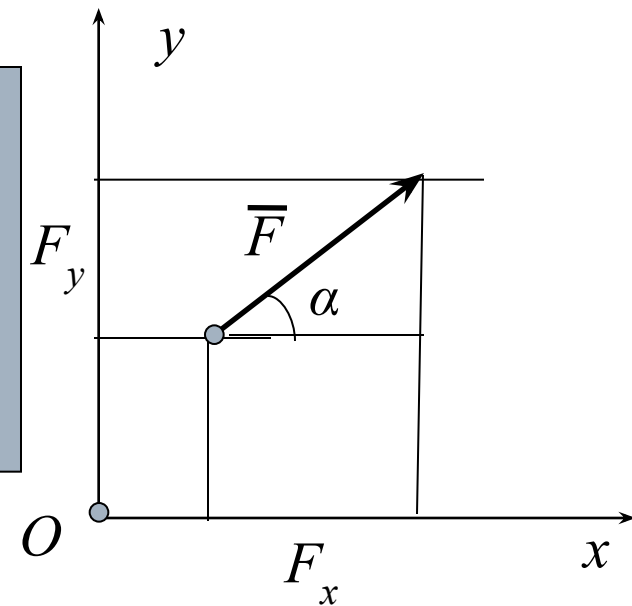
$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Косинусы углов α, β и γ (направляющие косинусы) - в виде:

$$\cos \alpha = F_x / |\vec{F}|, \quad \cos \beta = F_y / |\vec{F}|, \quad \cos \gamma = F_z / |\vec{F}|.$$

Б) Плоский случай. Пусть заданы проекции силы F на оси координат F_x, F_y .
 Модуль силы и угол α найдем из формул

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad \cos \alpha = F_x / |\vec{F}|.$$



Аналитический способ сложения сил

Аналитический способ сложения сил базируется на теореме:
Теорема 1. Проекция вектора суммы на какую - нибудь ось
 равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на
 ту же ось, то есть, если $\vec{a} = \sum \vec{a}_k$, то $a_x = \sum a_{kx}$.

Сложение пространственной системы сил

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{nx}; F_{1y}, F_{2y}, \dots, F_{ny}; F_{1z}, F_{2z}, \dots, F_{nz}$.

Тогда, в соответствии с Теоремой 1, если $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$, то

$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}, \quad R_z = \sum F_{kz}.$$

Вычислив R_x, R_y, R_z , найдем модуль $|\vec{R}|$

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

Направляющие косинусы углов α, β и γ - в виде:

$$\cos \alpha = R_x / |\vec{R}|, \quad \cos \beta = R_y / |\vec{R}|, \quad \cos \gamma = R_z / |\vec{R}|.$$

Сложение плоской системы сил

Пусть силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ лежат в одной плоскости и заданы аналитически, т.е. известны проекции сил на оси координат: $F_{1x}, F_{2x}, \dots, F_{nx}; F_{1y}, F_{2y}, \dots, F_{ny}$.

Тогда, в соответствии с Теоремой 1, если $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$, то

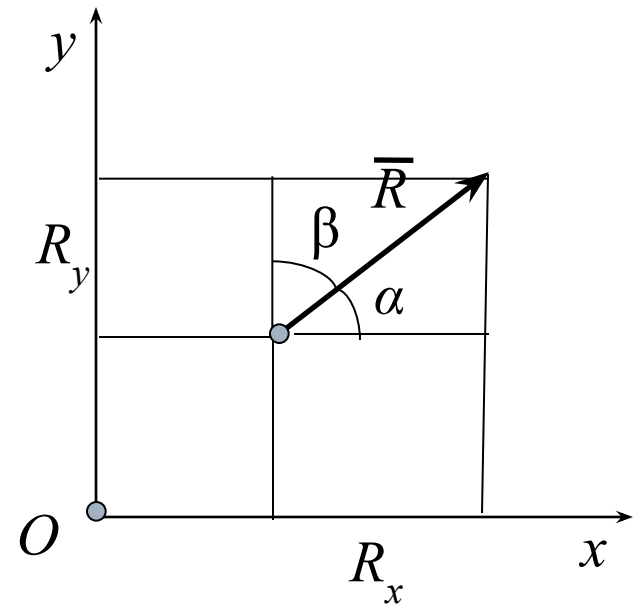
$$R_x = \sum F_{kx}, \quad R_y = \sum F_{ky}.$$

Вычислив R_x, R_y , найдем

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Направление силы определится углами α, β по формулам:

$$\cos \alpha = R_x / |\vec{R}|, \quad \cos \beta = R_y / |\vec{R}|.$$

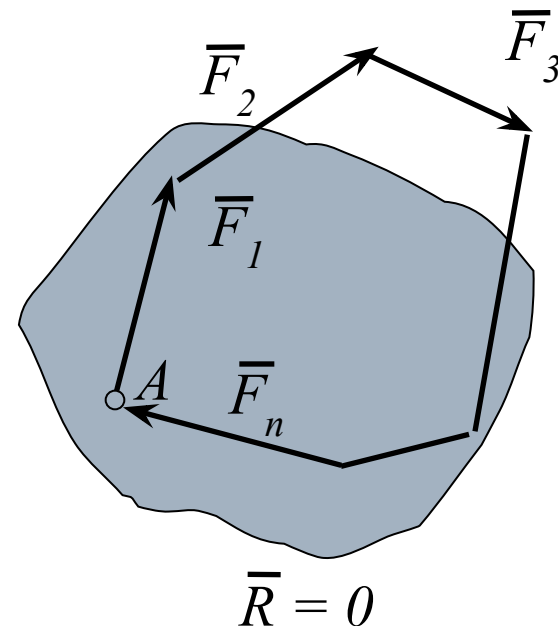
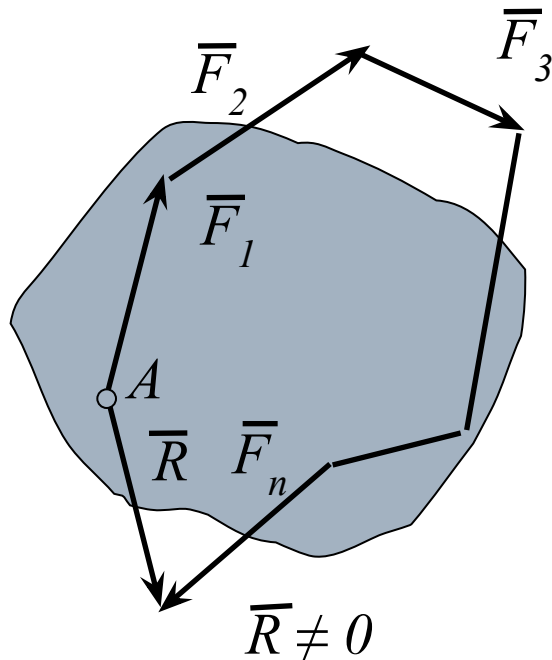


3. Равновесие сходящейся системы сил

Для равновесия сходящейся системы сил, приложенной к твердому телу, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая, а следовательно, и главный вектор сил были равны нулю.

Условия, которым при этом должны удовлетворять сами силы, можно выразить в геометрической или в аналитической форме.

3.1. Геометрические условия равновесия



Вывод. Для равновесия сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы силовой многоугольник, построенный на этих силах был замкнут.

3.2. Аналитические условия равновесия

Случай пространственной сходящейся системы сил

Аналитически модуль главного вектора системы сил определяется формулой:

$$|\overline{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}.$$

Подкоренное выражение при всех значениях R_x, R_y, R_z отличных от нуля положительно, следовательно равенство нулю возможно только в случае, когда R_x, R_y, R_z одновременно равны нулю, то есть когда одновременно

$$R_x = 0, R_y = 0, R_z = 0$$

Известно, что $R_x = \sum F_{kx}$, $R_y = \sum F_{ky}$, $R_z = \sum F_{kz}$.

Следовательно, при равновесии пространственной сходящейся системы сил

$$\sum F_{kx} = 0, \sum F_{ky} = 0, \sum F_{kz} = 0. \quad (*)$$

Равенства () выражают условия равновесия в аналитической форме пространственной сходящейся системы сил*

Вывод: для равновесия пространственной сходящейся системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций этих сил на каждую из трех координатных осей были равны нулю.

Случай плоской сходящейся системы сил

Если все действующие на тело сходящиеся силы лежат в одной плоскости, то они образуют плоскую сходящуюся систему сил. Тогда вместо условий (*), очевидно, имеем только два условия равновесия

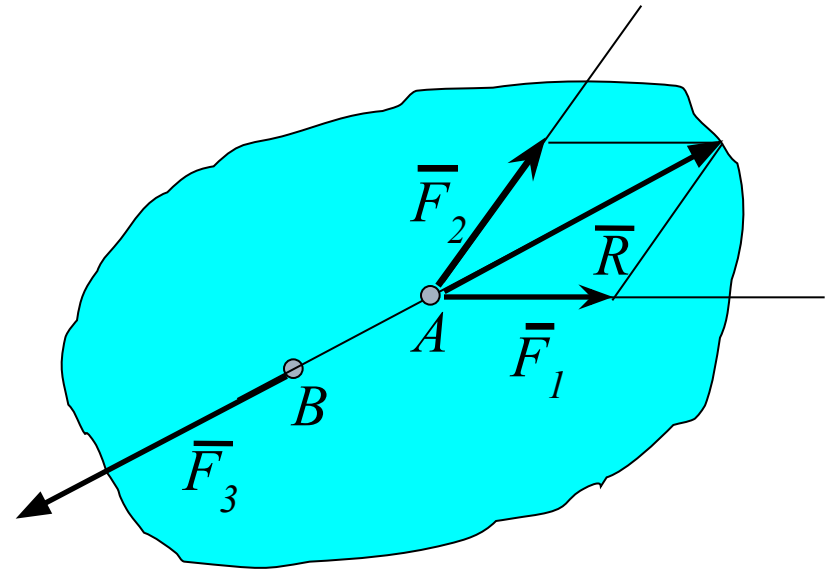
$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0. \quad (**)$$

Равенства (**) выражают условия равновесия в аналитической форме плоской сходящейся системы сил.

Теорема о трех силах

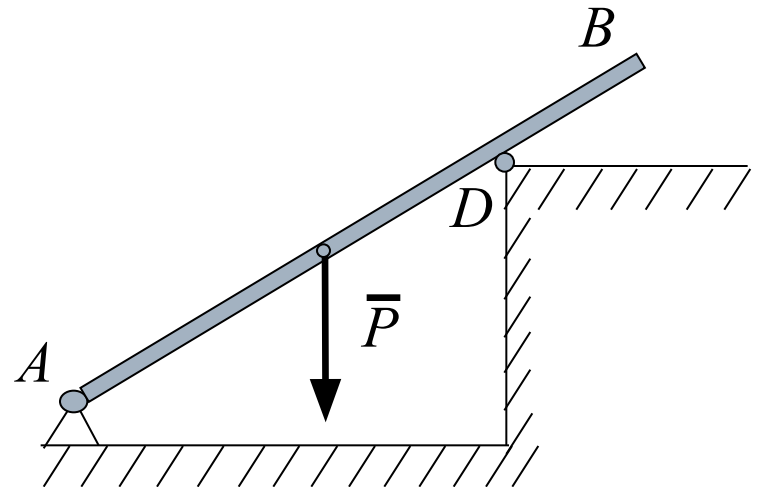
Теорема. Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия сил пересекаются в одной точке.

$$\vec{F}_3 = -\vec{R}'$$



Пример на применение теоремы о трех силах

Брус AB весом P , закреплен в точке A неподвижным шарниром и опирается на выступ D . Необходимо определить направление реакции опоры A .

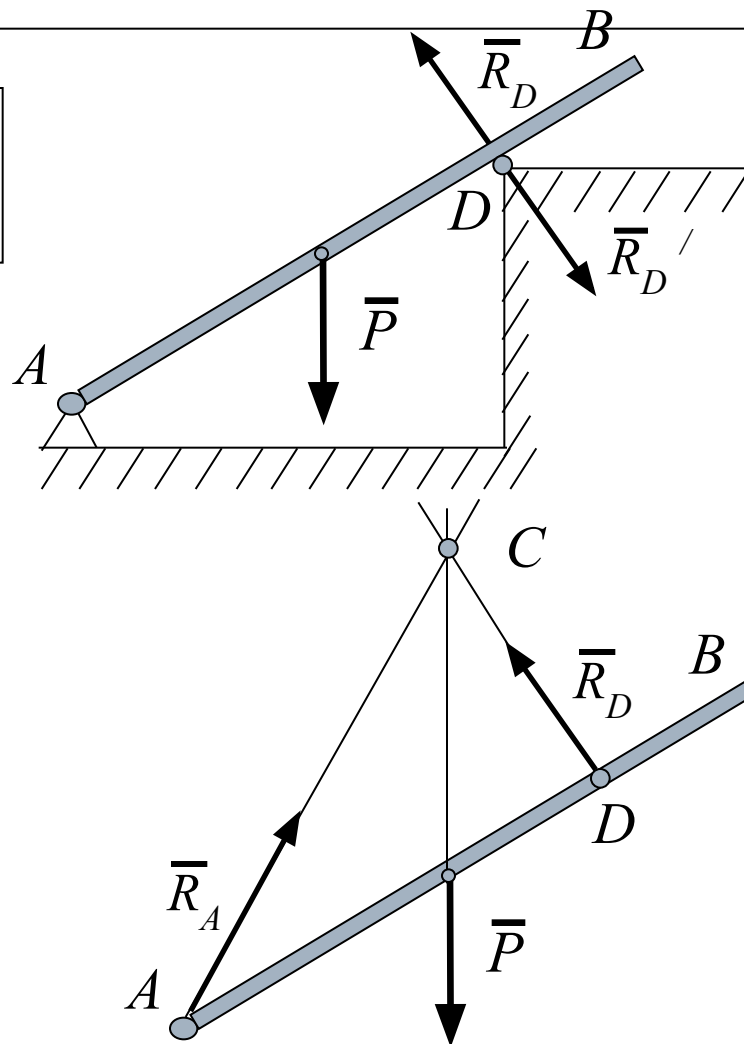


В точке D свободное опирание на выступ. Реакция опоры D направлена перпендикулярно к балке AB в сторону противоположную той, куда связь мешает телу переместиться.

Освободимся от связей используя аксиому связей.

Линии действия сил тяжести P и R_D пересекаются в точке C.

Тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, поэтому по теореме о трех силах линия действия реакции шарнира A будет проходить через точку C.



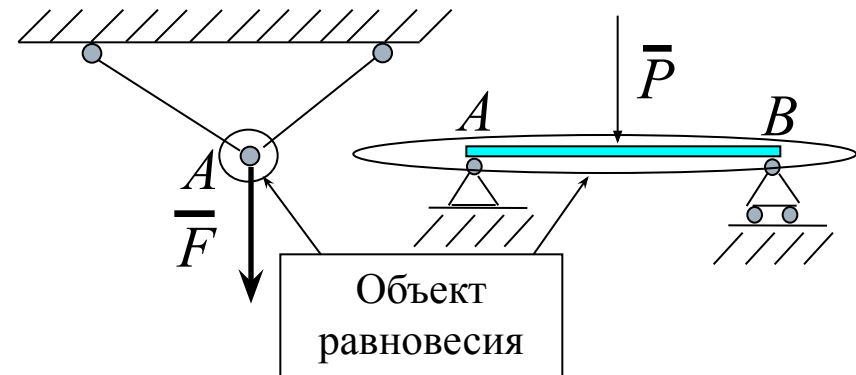
3.3. Решение задач на равновесие сходящейся системы сил

Замечание 1. Рассмотренный ниже алгоритм решения задач на равновесие применяется не только для систем сходящихся, но и для любых систем сил.

Замечание 2. В основном уравнения равновесия типа (*) и (**) будут применяться для определения реакций связей (опор), то есть для определения сил давления конструкций на эти связи.

Алгоритм решения задач на равновесие

1. Выбор тела (или тел), равновесие которого должно быть рассмотрено, то есть выбор объекта равновесия.



2. Изображение заданных (активных) внешних сил.

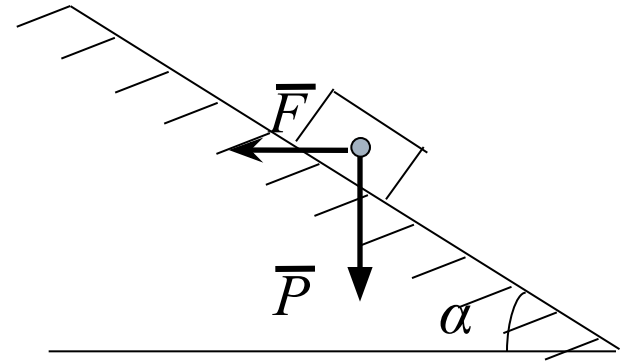
3. Замена (на основе применения аксиомы связей) связей их реакциями, то есть превращение несвободного тела в свободное.

4. Составление уравнений равновесия для системы сил, приложенной к свободному твердому телу.

5. Определение искомых величин, проверка правильности решений и исследование полученных результатов.

Пример

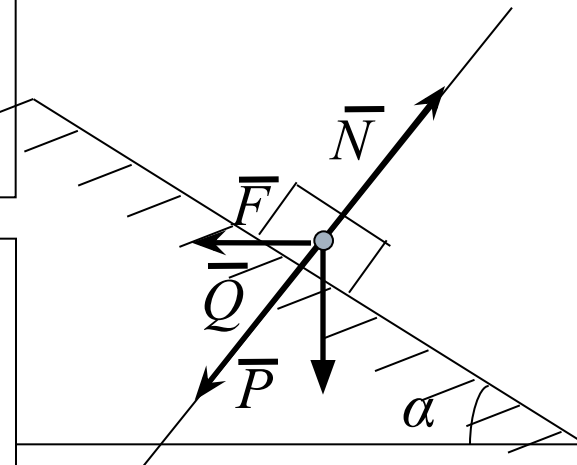
Груз весом P лежит на гладкой наклонной плоскости с углом наклона α . Определить значение $\vec{F}$, которую надо приложить к грузу, чтобы удержать его в равновесии, и найти чему при этом равна сила давления $\vec{Q}$ на плоскость.



Искомые силы действуют на разные тела: сила $\vec{F}$ на груз, сила $\vec{Q}$ – на плоскость.

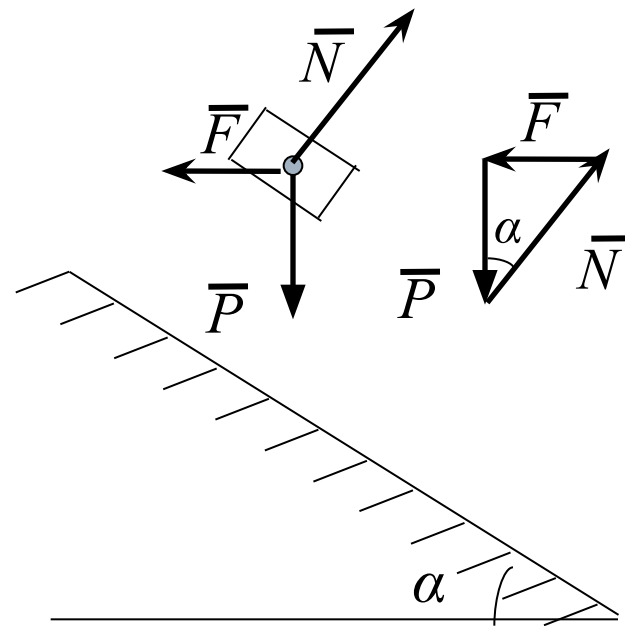
Вместо силы $\vec{Q}$ будем искать силу $\vec{N}$, которая равна ей по модулю и направлена в противоположную сторону.

Выберем в качестве объекта равновесия груз и изобразим действующие на него силы.



А) Геометрический способ

Груз находится под действием трех непараллельных сил, поэтому можно применить теорему о трех силах. Построим треугольник сил, который замкнут.



Из треугольника: $N = P / \cos (\alpha)$, $F = P \operatorname{tg} (\alpha)$.

Б) Аналитический способ

Рассмотрим груз, находящийся в равновесии под действием изображенных сил.

*Так как система действующих сходящихся сил является плоской, то для нее надо составить два условия равновесия $\sum F_{kx} = 0$, $\sum F_{ky} = 0$. (**)*

Составим таблицу проекций сил на оси.

$\vec{F}_k$	$\vec{P}$	$\vec{F}$	$\vec{N}$
F_{kx}	$P \sin \alpha$	$-F \cos \alpha$	0
F_{ky}	$-P \cos \alpha$	$-F \sin \alpha$	N

*Уравнения (**) для данной задачи имеют вид:*

$$P \sin \alpha - F \cos \alpha = 0$$

$$-P \cos \alpha - F \sin \alpha + N = 0$$

*Решая эту систему уравнений получим: $N = P / \cos (\alpha)$,
 $F = P \operatorname{tg} (\alpha)$.*

