Одночлен. Арифметические операции над одночленами

Понятие одночлена. Стандартный вид одночлена

- Одночлен называют алгебраическое выражение,которые представляет собой произведение чисел и переменных, возведённых в степень с натуральными показателями.
- Примеры одночленов: $2ab$; $(-2)xy^2$

Одночленом являются,в частности, также все числа,любые переменные, степени переменных.

Например,одночленами являются: 0; 2; -0,6; x; a^3.

Алгебраические выражения не являющиеся одночленом: a+b;$2X^2$ и т.д

- Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют коэффициентом, одночлена.

- Любой одночлен можно привести к стандартному виду.

Пример. Привести одночлен к стандартному виду и назвать коэффициент одночлена:

а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5$;

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c$;

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz$;

г) $\frac{3ab}{10}$.

Решение. а) $3x^2yz \cdot (-2)xy^2z^5 = 3 \cdot (-2)x^2xyy^2zz^5 = -6x^3y^3z^6$. Коэффициент одночлена равен −6.

б) $4ab^2c \cdot \frac{1}{4}c = 4 \cdot \frac{1}{4}ab^2(c \cdot c) = 1 \cdot ab^2c^2 = ab^2c^2$.

Коэффициент одночлена равен 1, такой коэффициент обычно не пишут, но подразумевают.

в) $-2ax^2y^3z^n \cdot \frac{1}{2}ax^5yz = (-2) \cdot \frac{1}{2}aax^2x^5y^3yz^nz = -a^2x^7y^4z^{n+1}$.

Коэффициент одночлена равен −1.

г) А это, как говорят, «маленькая провокация»: одночлен не надо приводить к стандартному виду, он и так записан в стандартном виде: $\frac{3}{10}ab$. Коэффициент одночлена равен 0,3.

Сложение и вычитание одночленов

- *__Определение__* два одночлена,состоящих из одних и тех же переменных,каждая из которых входит в оба одночлена в одинаковых степенях(т. е с разными показателями степеней), называют подобными одночленами.
- Примеры подобных одночленов:

$$2a \text{ и } 5a,\quad 3ab^2c \text{ и } -\frac{2}{7}ab^2c,\quad x^n \text{ и } 5x^n.$$

Алгоритм сложения одночленов

1. Привести все одночлены к стандартному виду.
2. Убедиться, что все одночлены подобны; если же они неподобны, то алгоритм далее не применяется.
3. Найти сумму коэффициентов подобных одночленов.
4. Записать ответ: одночлен, подобный данным, с коэффициентом, полученным на третьем шаге.

Пример 1. Упростить выражение

$$2a^2b - 7a \cdot 0{,}5ba + 3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a).$$

Решение. Речь идёт о сложении одночленов, значит, будем действовать в соответствии с алгоритмом.

1) Первый одночлен уже имеет стандартный вид. Для второго одночлена имеем

$-7a \cdot 0{,}5ba = -(7 \cdot 0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3{,}5a^2b$ — это стандартный вид.

Приведём к стандартному виду третий одночлен:

$$3b \cdot 2a \cdot (-0{,}5a) = 3 \cdot 2 \cdot (-0{,}5) \cdot (a \cdot a)b = -3a^2b.$$

2) Получили три одночлена: $2a^2b$, $-3{,}5a^2b$, $-3a^2b$. Они подобны, поэтому с ними можно производить дальнейшие действия, т. е. переходить к третьему шагу алгоритма.

3) Найдём сумму коэффициентов трёх полученных одночленов: $2 - 3{,}5 - 3 = -4{,}5$.

4) Запишем ответ: $-4{,}5a^2b$.

Умножение одночленов Возведение одночлена в натуральную степень

Пример 3. Представить одночлен $36a^2b^4c^5$ в виде произведения одночленов.

Решение. Здесь, как и в примере 2 из § 21, решение не единственное. Вот несколько вариантов решения:

$36a^2b^4c^5 = (18a^2)\cdot(2b^4c^5)$; $\quad 36a^2b^4c^5 = (-3b^4)\cdot(-12a^2c^5)$;

$36a^2b^4c^5 = (36abc)\cdot(ab^3c^4)$; $\quad 36a^2b^4c^5 = (2a^2)\cdot(3bc)\cdot(6b^3c^4)$.

Попробуйте сами придумать ещё несколько решений примера 3.

Деление одночлена на одночлен

Что такое одночлен, мы знаем; как одночлены складывать, вычитать, перемножать и даже возводить в степень — обсудили. Но ведь имеется ещё одна арифметическая операция — деление, операция, обратная умножению. Можно ли быть уверенным в том, что операция деления одночлена на одночлен всегда выполнима — в том смысле, что в частном получится одночлен? Вот об этом и поговорим.

Пример 1. Опираясь на свойства арифметических действий, попытаемся выполнить деление одночленов:

а) $10a : 2$; в) $36a^3b^5 : (4ab^2)$; д) $4x^3 : (2xy)$;

б) $18ab : (3a)$; г) $\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z)$; е) $a^2 : a^5$.

Решение. а) Воспользуемся тем, что если произведение двух чисел делят на третье число, то можно разделить на это число один из множителей и полученное частное умножить на другой множитель. (Вспомнили? Например, $(12 \cdot 4) : 3 = (12 : 3) \cdot 4 = 4 \cdot 4 = 16$.) Имеем

$$10a : 2 = (10 : 2) \cdot a = 5a.$$

б) Рассуждая как в примере а), получаем

$$18ab : (3a) = (18 : 3) \cdot (a : a)b = 6 \cdot 1 \cdot b = 6b.$$

в) $36a^3b^5 : (4ab^2) = (36 : 4) \cdot (a^3 : a) \cdot (b^5 : b^2) = 9a^{3-1} \cdot b^{5-2} = 9a^2b^3$.

Иногда удобнее вместо знака деления (:) использовать черту дроби. Вот как тогда будет выглядеть решение примера в):

$$\frac{36a^3b^5}{4ab^2} = \frac{36}{4} \cdot \frac{a^3}{a} \cdot \frac{b^5}{b^2} = 9a^2b^3.$$

г) Здесь мы используем комбинированную запись решения, т. е. и знак деления, и черту дроби:

$$\frac{4}{7}x^3y^2z : (-2x^3y^2z) = \left(\frac{4}{7} : (-2)\right) \cdot \frac{x^3y^2z}{x^3y^2z} =$$

$$= -\frac{4}{7 \cdot 2} \cdot \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{y^2}{y^2} \cdot \frac{z}{z} = -\frac{2}{7} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{7}.$$