Стохастические модели приземных трасс

Изучение особенностей поведения электромагнитных волн в условиях случайно-неоднородного канала распространения.

Оценка возможностей, которые представляют в такой ситуации статистические методы исследования.

Земная атмосфера

Показатель преломления ионосферы и тропосферы. Случайные вариации показателя преломления.

Взаимодействие случайно-неоднородной трассы с распространяющимся в ней сигналом. Ослабление волн при распространении в атмосфере.

Отдельные элементы теории случайных процессов

Понятие флуктуаций. Случайные отклонения макроскопических величин от их средних (в частности, термодинамически равновесных) значений.

Причины возникновения флуктуаций. Флуктуации, вызываемые турбулентностью среды. Возникновение турбулентных неоднородностей.

Основные положения теории вероятностей

1. **Вероятность событий**. *n* - число возможных событи
   m - число благоприятных исходов. В*ероятность событий* определяется отношением:

$$p = \frac{m}{n}.$$

2. Достоверное событие – вероятность равна единице. Равенство вероятности нулю не означает, что событ невозможно.

•

Основные положения теории вероятностей - 2

Произведение событий – одновременное осуществление событий А и В: $AB = C$

Запись

$$A+B=C$$

означает осуществление одного из событий.

Зависимые и независимые события. Пусть А и В независимы, - вероятность одновременного осуществления этих событий

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Основные положения теории вероятностей - 3

Условная вероятность. Пусть имеется система *n* событий. Выделим из них *m* событий. Число благоприятных случаев обозначим через *l.* Вероятность события *l*, очевидно, будет равн

.

$$\frac{l}{n}=\frac{m}{n}\frac{l}{m}$$

При этом $\frac{m}{n}$ - вероятность события *m .*

$\frac{l}{m}$ - вероятность события *m* при условии, что событие *m*

произошло.

Соответственно,

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(\frac{B}{A}\right)$$

Основные положения теории вероятностей - 4

- ***Вероятность суммы двух событий***.

Сумма двух событий – это осуществление любого из них.

Для несовместимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Для совместимых событий

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Формула Байеса связывает априорные и апостериорные вероятности событий

$$P(A_i/K)=\frac{P(A_i)P(K/A_i)}{P(K)}=\frac{P(A_i)P(K/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(K/A_i)}$$

Основные положения теории вероятностей - 5

- ***Вероятность при n независимых испытаниях***

p – вероятность события при одном испытании.

$$q = 1 - p$$

- вероятность того, что событие не происходит. Число
неблагоприятных исходов $n - m$

Вероятность *m* событий при *n* независимых испытаниях

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}.$$

(Закон Бернулли или биномиальное распределение).

Основные положения теории вероятностей-7

- Распределение Пуассона – на оси абсцисс случайным образом распределены точки. Вероятность того, что в интервал длиной *l* попадет ровно *k* точек:

$$P_k(l) = \frac{\left(\lambda l\right)^k}{k!} \exp\left(-\lambda l\right)$$

λ - математическое ожидание числа точек, приходящихся на единицу длины

Плотность вероятности и функции распределения

Вероятность события *P*, заключающаяся в том, что наблюдаемая случайная величина меньше или равна допустимому значению *x*, определяет функцию распределения вероятностей случайной величины *X*:

$$F_X(x) = P(X \le x)$$

Плотность распределения вероятностей

$$f_X(x)dx = F(x+\Delta x) - F(x) = P(x < X \le x + dx)$$

$f_X(x)dx$ – элемент вероятности, - вероятность того, что случайная величина *X* лежит в диапазоне возможных значений от *x* до *x*+d*x*.

.

Плотность вероятности и функции распределения-2

По определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Гистограмма.

***Основные свойства плотности распределения вероятностей*:**

$$f_X(x) \geq 0 \quad -\infty \leq x \leq +\infty;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1;$$

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx;$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$

Виды распределений

Нормальное (гауссовское) распределение

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[- (x - \langle X \rangle)^2 / 2\sigma^2 \right] \quad -\infty < x < \infty$$

- Основа для формулировки ЦПТ;
- Характеризуется первыми двумя моментами. Все нечетные моменты равны 0. Четные полностью определяются через момент 2-ого порядка. Удобен для вычислений.

Реальные процессы часто асимметричны и имеют больше одного максимума.

Типы распределений параметров оптического пучка

Нормальное распределение:

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{I_{\min}}^{I_{\max}} \exp\left[-\,(x - \langle X \rangle)^2 / 2\sigma^2 \right]$$

Экспоненциальное распределение

$$F = 1 - \exp\left[-\left(\frac{I}{\langle I \rangle} \right) \right]$$

Нормально- логарифмическое распределение

$$\tilde{\sigma}^2_{\ln I} = \ln(1 + \sigma^2)$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \int_{I_{\min}}^{I_{\max}} \frac{1}{I} \exp\left[-\left(\ln \frac{I}{\langle I \rangle} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{2} \right) \left(2\tilde{\sigma}^2 \right)^{-1} \right] dI$$

Типы случайных процессов

- 1) *случайный процесс общего типа*: t и $X(t)$ могут принимать любые значения на отрезке или, быть может, на всей действительной оси;

- 2) *дискретный случайный процесс*: t непрерывно, а величины $X(t)$ дискретны;

- 3) *случайная последовательность общего типа*: t дискретно, а $X(t)$ может принимать любые значения на отрезке (или на всей) действительной оси;

- 4) *дискретная случайная последовательность*: t и $X(t)$ оба дискретны.

Средние значения и моменты случайных величин

Выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

Математическое ожидание

$$\overline{X} = \frac{(p_1 m)x_1 + (p_2 m)x_2 + ... + (p_n m)x_n}{n}$$

Усреднение по ансамблю

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x;t)dx$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$M[X] = \int x f_X(x)dx$$

Средние значения и моменты случайных величин-2

Величины средних по ансамблю реализаций для любых степеней случайного процесса называются ***начальными моментами*** *n*-го порядка:

$$m_n(t) = \left\langle X^n(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x;t)dx$$

Центральные моменты *n*-го порядка определяются как

$$M_n(t) \equiv \left\langle \delta X^n(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \left\langle X(t) \right\rangle)^n f(x;t)dx$$

и представляют моменты для центрированного процесса

$$\delta X(t) \equiv X(t) - \left\langle X(t) \right\rangle$$

Начальный момент 1-ого порядка – среднее значение или математическое ожидание.

Начальный момент 2-ого порядка – средний квадрат случайной величины

$$m_2(t) = \left\langle X^2(t) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,t)dx$$

Средние значения и моменты случайных величин-2

Первый центральный момент всегда равен нулю

$$M_1(t) = 0$$

Второй центральный момент называется дисперсией

$$M_2(t) = \sigma^2(t)$$

$$\sigma^2 = M_2 = \left\langle \delta X^2 \right\rangle = \left\langle X^2 \right\rangle - \left\langle X \right\rangle^2$$

В качественном смысле дисперсия величины X представляет меру ее разброса относительно среднего.

Третий центральный момент служит критерием оценки асимметрии закона распределения относительно оси, параллельной оси ординат и проходящей через среднее значение случайной величины, - коэффициент асимметрии

$$\gamma = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

Средние значения и моменты случайных величин-3

Равенство нулю коэффициента асимметрии не является достаточным условием нормальности распределения. Положительная и отрицательная асимметрия.

Четвертый центральный момент. Иногда используют численную характеристику «сглаженности» кривой распределения около моды (максимального значения) – коэффициент эксцесса:

$$\beta = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3$$

Для нормального процесса

$$\beta = 3$$

Другие виды распределений

Распределение Максвелла

$$f(\mathrm{v}) = 4\pi \mathrm{v}^2 \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\mathrm{v}^2}{2kT}\right)$$

Распределение Накагами или m-распределение

$$f(R) = \frac{2}{\Gamma(m)}\left(\frac{m}{\Omega}\right) R^{2m-1} \exp\left(-\frac{m}{\Omega} R^2\right)$$

$R_k \exp\left(i\theta_k\right)$ - отдельная составляющая сигнала

$$m = \left(\frac{\left\langle R^2 \right\rangle^2}{\left\langle \left(R^2 - \left\langle R^2 \right\rangle\right)^2 \right\rangle}\right); \quad \Omega = \left\langle R^2 \right\rangle; R \geq 0$$

$$m \geq \frac{1}{2}$$

Другие виды распределений -2

- При $m = \dfrac{1}{2}$ получаем нормальное распределение

как частный случай распределения Накагами.

При $m = 1$ имеет место обычное распределение Релея

$$F(R) = \frac{2R}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{R^2}{\sigma^2}\right)$$

При *m*>1 получаем обобщенное релеевское распределение:

$$f(R) = \frac{2R}{\sigma}\exp\left(-\frac{R^2 + R_0^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2RR_0}{\sigma^2}\right)$$

При *m*=***n***/2, где *n* – целое и положительное, приходим к χ^2 распределению.

Корреляционная функция

Введение двумерной плотности вероятности

$$f(x_1;x_2;t_1;t_2)$$

позволяет ввести второй смешанный центральный момент, - корреляционную функцию

$$K(t_1;t_2) \equiv M(t_1;t_2) = \left\langle \delta X(t_1)\delta X(t_2) \right\rangle =$$

$$= \left\langle X(t_1)X(t_2) \right\rangle - \left\langle X(t_1) \right\rangle \left\langle X(t_2) \right\rangle$$

Для количественной характеристики зависимости случайных функций вводится нормированная корреляционная функция – коэффициент корреляции

$$R(t_1;t_2) \equiv \frac{K(t_1;t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}$$

Корреляционная функция

Радиус корреляции (временной и пространственный).

$$\tau_0(t_1) = \int_0^{\infty} R(t_1;t_2)\,dt_2$$

Свойства корреляционной функции:

Равенство нулю для статистически независимых значений случайного процесса.

Симметричность относительно аргументов

$$K\left(t_1;t_2\right) = \left(\ _2;\ _1\right)$$

Ограниченность коэффициента корреляции

$$R(t_1;t_2) \leq 1$$

Ковариационный момент

Ковариационный момент – математическое ожидание произведения двух центрированных случайных величин

$$K_{XY} = M\left[\left(X - m_X\right)\left(Y - m_Y\right)\right]$$

Для непрерывных случайных величин он определяется как

$$K_{XY} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - m_X\right)\left(y - m_Y\right) f_{XY}\left(x, y\right) dxdy$$

Ковариационный момент есть характеристика двух случайных величин, которая, помимо рассеяния величин и описывает еще и связь между ними. Можно легко показать, что если ковариационный момент двух случайных величин отличен от нуля, это есть признак зависимости между ними.

$$R_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Особенности поведения коэффициента корреляции.