Лекция №7
ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКЕ

Ранее мы определяли перемещения прямого стержня при растяжении, кручении и изгибе. Рассмотрим теперь общий случай нагружения, когда в поперечных сечениях могут возникать нормальные и поперечные силы, изгибающие и крутящие моменты одновременно. Кроме того, расширим круг рассматриваемых вопросов, полагая, что стержень может быть не только прямым, но и иметь малую кривизну или состоять из ряда участков, образующих плоскую или пространственную систему.

Наиболее просто находятся перемещения при помощи энергетических соотношений на основе общего выражения потенциальной энергии нагруженного стержня.
Определению потенциальной энергии предшествует анализ внутренних силовых факторов, возникающих в стержне. Этот анализ производится, как известно, при помощи метода сечений и завершается построением эпюр изгибающих и крутящих моментов, а в тех случаях, когда это необходимо,— построением эпюр нормальных и поперечных сил.

Рассмотрим общий случай нагружения стержня, то есть когда в его поперечных сечениях возникают шесть силовых факторов: три момента и три силы. Для определения потенциальной энергии выделим из стержня элементарный участок длиной *dz* (рис. 1).

Стержень может быть не только прямым, но иметь малую начальную кривизну.

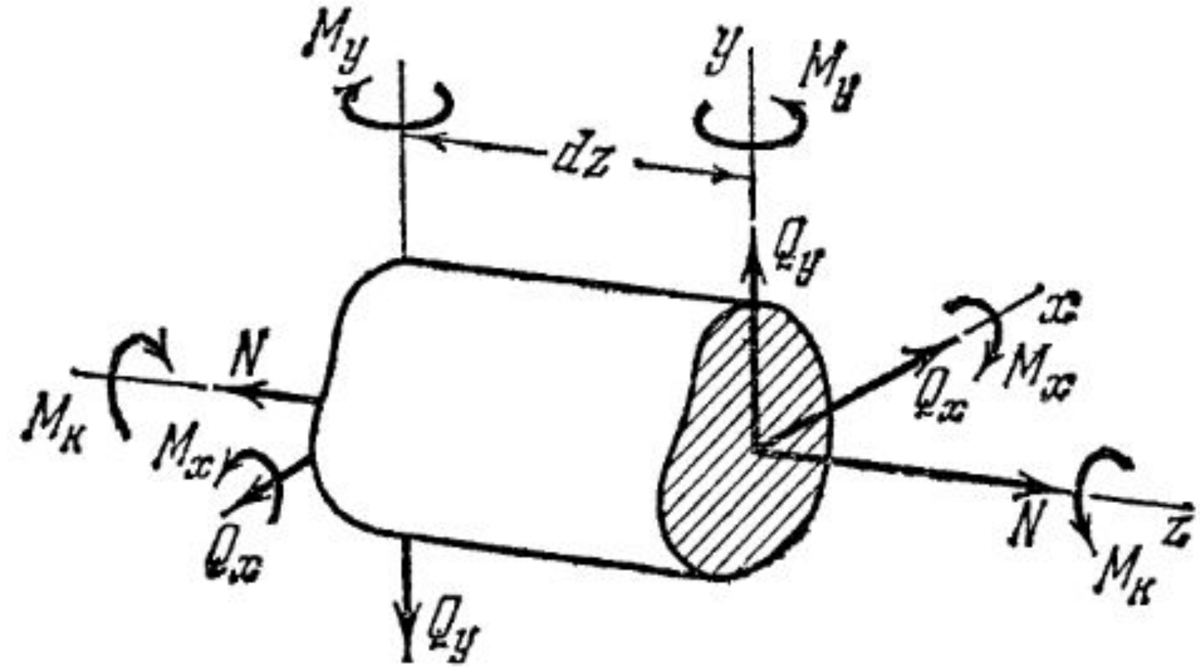


Рис. 1

По отношению к выделенному элементарному участку рассмотрим эти силовые факторы как внешние и **определим работу**, которая совершается ими **при деформировании элемента**.
Эта *работа* **переходит** в *потенциальную энергию*, накопленную в элементарном участке стержня.
Левое сечение элемента (рис. 1) условно будем рассматривать как неподвижное с тем, чтобы работа всех силовых факторов, приложенных к левому торцу, была равна нулю.
Точка приведения сил в правом сечении вследствие деформации элемента получает некоторые малые перемещения, на которых

Очень важно, что каждому из шести силовых факторов соответствуют такие перемещения, на которых ни один из остальных пяти работы не совершает. Так, например, под действием момента $M_к$ возникает угол поворота сечения относительно оси *z*. На этом угловом перемещении работа совершается только этим моментом $M_к$. Линейное перемещение вдоль оси ***y*** возникает вследствие действия силы $\boldsymbol{Q_y}$, и только эта сила совершает работу на этом перемещении.

Следовательно, **потенциальная энергия элемента** может рассматриваться как **сумма *независимых* работ** каждого из шести силовых факторов, т.е., иначе говоря, как сумма энергий кручения, изгиба, растяжения и сдвига:

$$dU = dU(M_k) + dU(M_x) + dU(M_y) + dU(N) +$$

$$+ dU(Q_x) + dU(Q_y) \qquad (1)$$

Такое разделение работ возможно лишь при определенном выборе осей. **Точка приведения сил** должна совпадать с **центром тяжести** сечения. Иначе нормальная сила ***N*** вызовет поворот сечения и изгибающие моменты совершат работу на угловом перемещении, Оси ***x*** *и* ***y*** должны **быть главными**. Иначе момент M_x вызовет поворот сечения относительно оси ***y*** и будет произведена взаимная работа на угловых перемещениях, вызванных двумя изгибающими моментами.

Выражения для слагаемых в (1) нам известны:

$$dU(M_k) = \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} \qquad dU(M_x) = \frac{M_x^2 dz}{2EI_x}$$

$$dU(M_y) = \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} \qquad dU(N) = \frac{N^2 dz}{2EF}$$

$$dU(Q_y) = k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GF} \qquad dU(Q_x) = k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GF}$$

Коэффициенты k_x и k_y представляют собой безразмерные величины, зависящие от геометрической формы сечения.

Выражение (1) теперь примет вид:

$$dU = \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} + \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \frac{N^2 dz}{2EF} +$$

$$+ k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GF} \qquad (2)$$

Чтобы получить потенциальную энергию всего стержня, выражение (2) следует проинтегрировать по длине:

$$U = \int_l \frac{M_k^2 dz}{2GI_k} + \int_l \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_l \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \int_l \frac{N^2 dz}{2EF} +$$

$$+ \int_l k_y \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \int_l k_x \frac{Q_x^2 dz}{2GF} \qquad (3)$$

Если конструкция сложная и состоит из нескольких элементов, имеющих форму стержня, то после интегрирования в пределах каждого стержня должно быть произведено суммирование энергии по числу составляющих элементов.

В выражении (3) не всегда все слагаемые являются равноценными. Для подавляющего большинства встречающихся на практике систем, где составляющие элементы работают на изгиб или кручение, три последних слагаемых в выражении (3) оказываются существенно меньшими трех первых. Иначе говоря, энергия растяжения и сдвига, как правило, существенно меньше энергии изгиба и кручения.

Вместе с тем возможны такие случаи, в которых рассматриваемые слагаемые оказываются величинами одного порядка.

Теорема Кастилиано

В основу определения перемещений стержня может быть положена теорема Кастилиано: *частная производная от потенциальной энергии системы по силе равна перемещению точки приложения силы по направлению этой силы.*

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n \qquad (4)$$

Условимся под перемещением в заданном направлении понимать проекцию полного перемещения на заданное направление. Поэтому перемещение точки приложения силы по направлению силы надо понимать как проекцию на направление силы полного перемещения этой точки.

Рассмотрим упругое тело, нагруженное произвольной системой сил и закрепленное тем или иным способом, но так, чтобы были исключены его смещения как жесткого целого (рис. 2).

Пусть потенциальная энергия деформации, накопленная в объеме тела в результате работы внешних сил, равна *U* и выражена через силы.

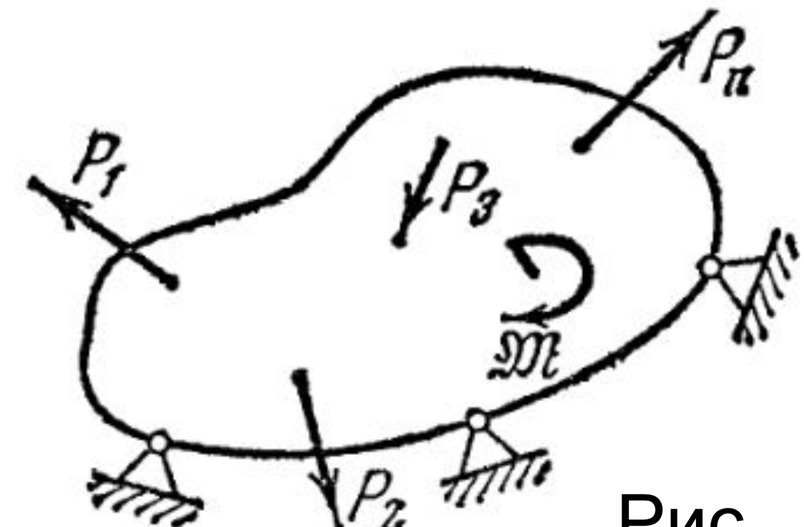


Рис. 2

Одной из сил, например силе P_n, дадим приращение dP_n. Тогда потенциальная энергия *U* получит приращение $\frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$ и примет вид

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n \qquad (5)$$

Изменим теперь порядок приложения сил. Приложим сначала к упругому телу силу dP_n. В точке приложения этой силы возникнет соответственно малое перемещение, проекция которого на направление силы dP_n равна $d\delta_n$. Тогда работа силы dP_n оказывается равной $dP_n d\delta_n/2$. Теперь приложим всю систему внешних сил. При отсутствии силы dP_n потенциальная энергия системы снова приняла бы значение ***U.*** Но теперь эта энергия изменится на величину дополнительной работы $dP_n\delta_n$, которую совершит сила dP_n на перемещении δ_n, вызванном всей системой внешних сил.

Величина $\boldsymbol{\delta_n}$ опять представляет собой проекцию полного перемещения на направление силы $\boldsymbol{P_n}$. Перед произведением $\boldsymbol{dP_n\delta_n}$ множитель $1/2$ не ставится, поскольку на пути $\boldsymbol{\delta_n}$ сила $\boldsymbol{dP_n}$ остается неизменной.

В итоге при обратной последовательности приложения сил выражение потенциальной энергии получаем в виде

$$U + dP_n\delta_n + \frac{1}{2}dP_n d\delta_n \qquad (6)$$

Приравниваем это выражение (6) выражению (5) и, отбрасывая произведение $\boldsymbol{dP_n d\delta_n/2}$ как величину высшего порядка малости, находим

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = \delta_n$$

Следовательно, дифференцируя потенциальную энергию по одной из внешних сил (при прочих неизменных силах), находим перемещение точки приложения этой силы по направлению силы.

Если еще раз внимательно рассмотреть вывод, то легко установить, что в выражении (4) силу $\boldsymbol{P_n}$ можно трактовать как обобщенную силу, т. е. как некоторый силовой фактор. Тогда величина $\boldsymbol{\delta_n}$ должна рассматриваться как обобщенное перемещение, т. е. как такой геометрический параметр, на котором обобщенная сила $\boldsymbol{P_n}$ совершает работу. Например, если под $\boldsymbol{P_n}$ понимать внешний момент M(рис. 2), то $\boldsymbol{\delta_n}$ представляет собой угловое перемещение в точке приложения момента по направлению момента.

Интеграл Мора

Определение перемещений при помощи **теоремы Кастилиано** обладает тем очевидным **недостатком**, что дает возможность определить **перемещения** только точек приложения внешних сил и **только в направлении этих сил**. На практике же возникает необходимость определять перемещения любых точек системы в любом направлении.

Выход из указанного затруднения оказывается довольно простым. **Если необходимо определить** перемещение в точке, где не приложены внешние силы, мы сами прикладываем в этой точке внешнюю силу $\boldsymbol{\Phi}$ в интересующем нас направлении.

Далее, составляем выражение потенциальной энергии системы с учетом силы ***Ф***. Дифференцируя его по ***Ф***, находим перемещение рассматриваемой точки по направлению приложенной силы ***Ф***. Теперь остается «вспомнить», что на самом деле силы ***Ф*** нет, и положить ее равной нулю. Таким образом, определяется искомое пе

Определим перемещение точки A в направлении оси x_1 для стержневой системы, показанной на рис. 3.

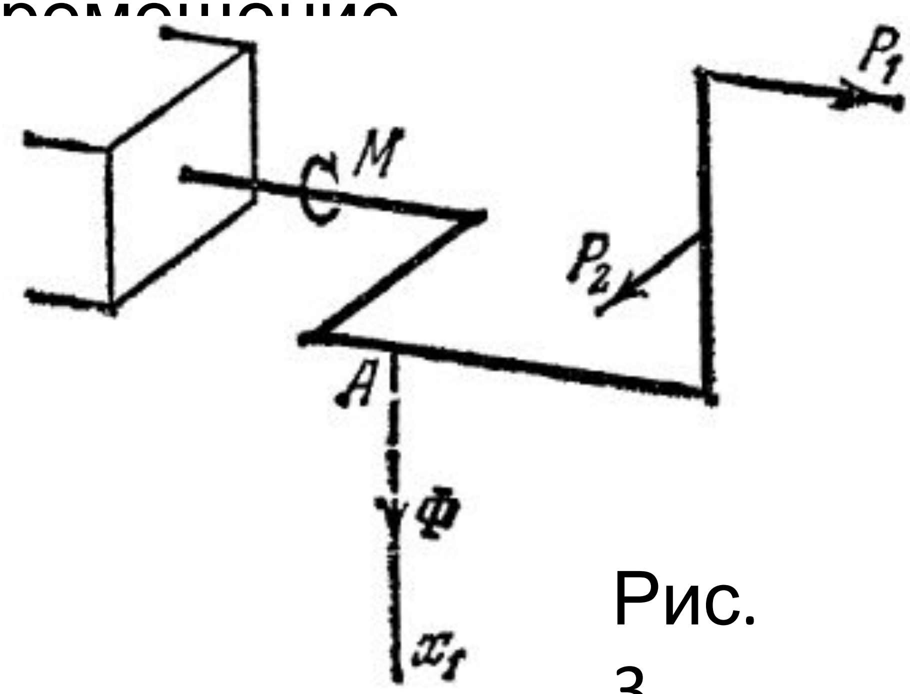


Рис. 3

Приложим в точке ***A*** по направлению $\boldsymbol{x_1}$ силу ***Ф***. Внутренние силовые факторы в каждом поперечном сечении при этом, вообще говоря, изменятся на величины, зависящие от силы ***Ф***. Так, например, крутящий момент в некотором поперечном сечении будет иметь вид

$$M_{kP} + M_{k\phi}$$

где первое слагаемое представляет собой момент, который возникает под действием заданной системы внешних сил, а второе слагаемое — дополнительный момент, который появляется в результате приложения силы ***Ф***.

Понятно, что и $\boldsymbol{M_{kP}}$ и $\boldsymbol{M_{k\Phi}}$ являются функциями $\boldsymbol{z}$, т. е. изменяются по длине стержня. Аналогично появляются дополнительные слагаемые и у остальных внутренних силовых факторов:

$$M_x = M_{xP} + M_{x\Phi} \qquad M_y = M_{yP} + M_{y\Phi}$$ и т. д.

Совершенно очевидно, что дополнительные силовые факторы $\boldsymbol{M_{k\Phi}}$, $\boldsymbol{M_{x\Phi}}$, ... пропорциональны силе $\boldsymbol{\Phi}$. Если силу $\boldsymbol{\Phi}$, например, удвоить, удвоятся соответственно и дополнительные силовые факторы. Следовательно,

$$M_k = M_{kP} + M_{k1}\Phi \qquad M_x = M_{xP} + M_{x1}\Phi$$

$$M_y = M_{yP} + M_{y1}\Phi \qquad N = N_P + N_1\Phi \qquad (7)$$

$$Q_x = Q_{xP} + Q_{x1}\Phi \qquad Q_y = Q_{yP} + Q_{y1}\Phi$$

где M_{k1}, M_{x1}, ...— некоторые коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения рассматриваемого сечения, т. е. переменные по длине стержня. Если снять систему внешних сил и заменить силу $\boldsymbol{\Phi}$ единичной силой, то

$$M_k = M_{k1} \qquad M_x = M_{x1}$$ и т. д.

Следовательно, M_{k1}, M_{x1}, M_{y1}, N_1, Q_{y1}, Q_{x1} суть не что иное, как внутренние силовые факторы, возникающие в поперечном сечении под действием единичной силы, приложенной в рассматриваемой точке в заданном направлении.

Вернемся к выражению энергии (3) и заменим в нем внутренние силовые факторы их значениями (7). Тогда

$$U=\int_l \frac{\left(M_{kP}+\Phi M_{k1}\right)^2}{2GI_k}dz+\int_l \frac{\left(M_{xP}+\Phi M_{x1}\right)^2}{2EI_x}dz+$$

$$+\int_l \frac{\left(M_{yP}+\Phi M_{y1}\right)^2}{2EI_y}dz+\int_l \frac{\left(N_P+\Phi N_1\right)^2}{2EF}dz+$$

$$+\int_l k_y\frac{\left(Q_{yP}+\Phi Q_{y1}\right)^2}{2GF}dz+\int_l k_x\frac{\left(Q_{xP}+\Phi Q_{x1}\right)^2}{2GF}dz$$

Дифференцируем последнее выражение по ***Ф*** и, полагая после этого ***Ф=0***, находим перемещение точки А:

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial \Phi}\bigg|_{\Phi=0} = \int_l \frac{M_{kP} M_{k1} dz}{2GI_k} + \int_l \frac{M_{xP} M_{x1} dz}{2EI_x} +$$

$$+ \int_l \frac{M_{yP} M_{y1} dz}{2EI_y} + \int_l \frac{N_P N_1 dz}{2EF} +$$

$$+ \int_l k_y \frac{Q_{yP} Q_{y1} dz}{2GF} + \int_l k_x \frac{Q_{xP} Q_{x1} dz}{2GF} \qquad (8)$$

Полученные интегралы носят название ***интегралов Мора.***

Способ Верещагина

Основным недостатком определения перемещений при помощи интеграла Мора является необходимость составления аналитического выражения подынтегральных функций. Это особенно неудобно при определении перемещений в стержне, имеющем большое количество участков. Однако, если он состоит из прямых участков с постоянной в пределах каждого участка жесткостью, операцию интегрирования можно упростить. Это упрощение основано на том, что эпюры от единичных силовых факторов на прямолинейных участках оказываются линейными.

Положим, на участке длиной *l* нужно взять интеграл от произведения двух функций $f_1(z)\ f_2(z)$

$$I = \int_0^l f_1(z) f_2(z) dz \qquad (9)$$

при условии, что по крайней мере одна из этих функций — линейная. Пусть $f_2(z)=b+kz$. Тогда выражение (9) примет вид

$$I = b\int_0^l f_1(z)dz + k\int_0^l z f_1(z)dz$$

Первый из написанных интегралов представляет собой площадь, ограниченную кривой $f_1(z)$ (рис. 4), или, короче говоря, площадь эпюры $f_1(z)$:

$$\int_0^l f_1(z)dz = \omega_1$$

Второй интеграл представляет собой статический момент этой площади относительно оси ординат, т. е.

$$\int_0^l z f_1(z)dz = \omega_1 z_{ц.т.}$$

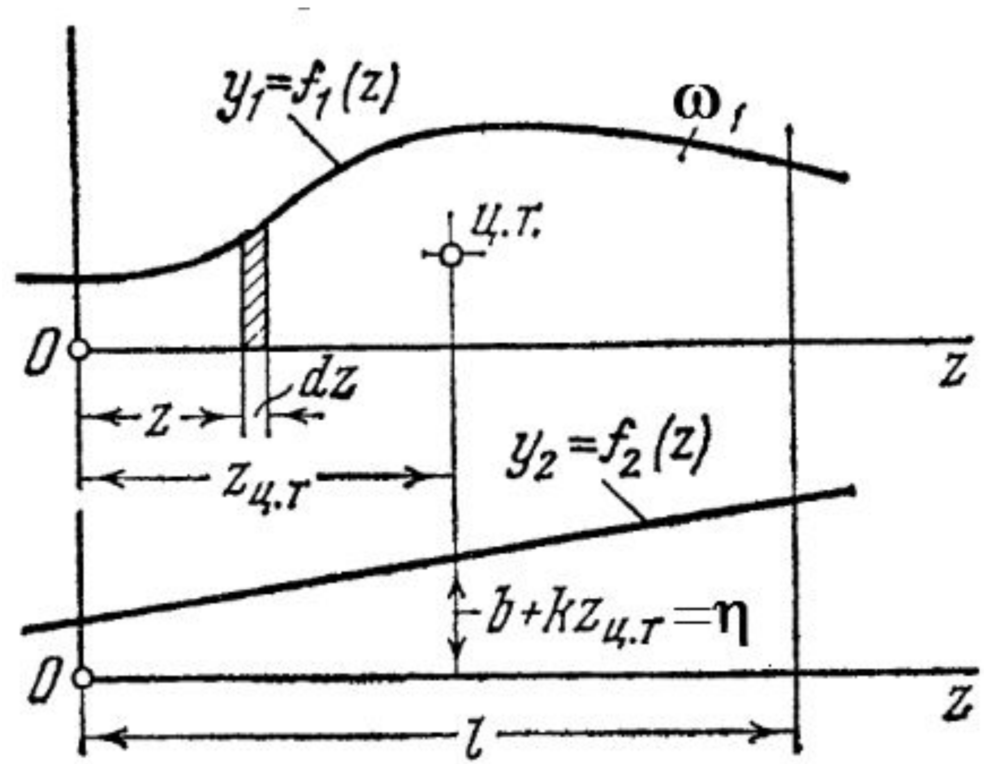


Рис. 4

Теперь получаем $I = \omega_1 (b + kz_{ц.т.})$

Но $b + kz_{ц.т.} = f_2(z_{ц.т.}) = \eta$

Следовательно, $I = \omega_1 \eta$

Таким образом, по способу Верещагина операция интегрирования заменяется перемножением площади первой, эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой.

В случае, если обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ — линейные, операция перемножения обладает свойством коммутативности. В этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой.

В каждый из интегралов Мора (8) входит произведение функций $\mathrm{M}_{xP}\mathrm{M}_{x1}$, $\mathrm{M}_{kP}\mathrm{M}_{k1}$ и т. д. Способ Верещагина применим к любому из шести интегралов, и перемножение эпюр производится одинаково, независимо от того, построены эти эпюры для изгибающих или крутящих моментов или нормальных и поперечных сил. Разница заключается лишь в том, что «произведение» эпюр делится не на жесткость EJ, как при изгибе, а на жесткость GJ_K, если речь идет о кручении, или на EF или GF — при растяжении и сдвиге.

Для применения способа Верещагина необходимо вычислять площадь эпюры моментов и положение ее центра тяжести, что при сложных эпюрах все равно потребует интегрирования, как и в методе Мора. Однако встречающиеся на практике эпюры изгибающих моментов могут быть, как правило, разбиты на простейшие фигуры: прямоугольник, треугольник и параболический треугольник (рис. 5), для которых величина площади $\boldsymbol{\omega}$ и положение центра тяжести известны. При кручении, растяжении и сдвиге эпюры оказываются еще более простыми: они, как правило,— линейные и состоят из прямоугольников и треугольников в различных комбинациях.

Пример

Площади эпюр и расстояния до их центров тяжести

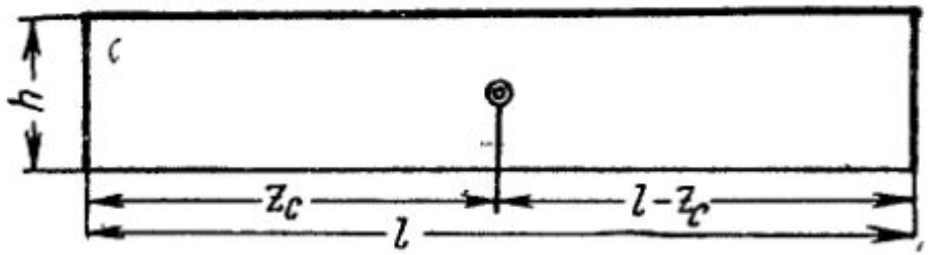
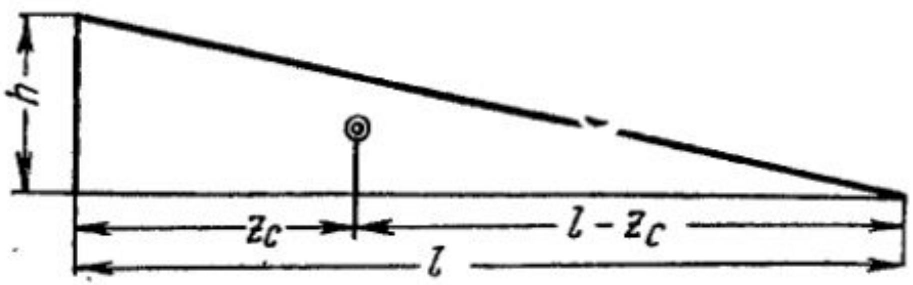
Вид эпюры	Площадь эпюры ω	Расстояние до центра тяжести	
		z_c	$l - z_c$
	hl	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{1}{2}hl$	$\frac{1}{3}l$	$\frac{2}{3}l$

Рис. 5

Площади эпюр и расстояния до их центров тяжести

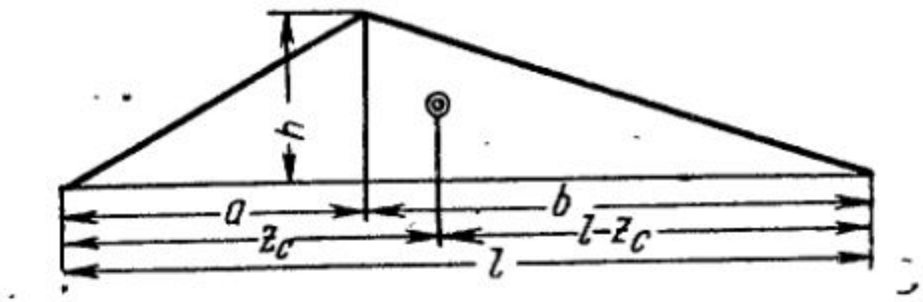
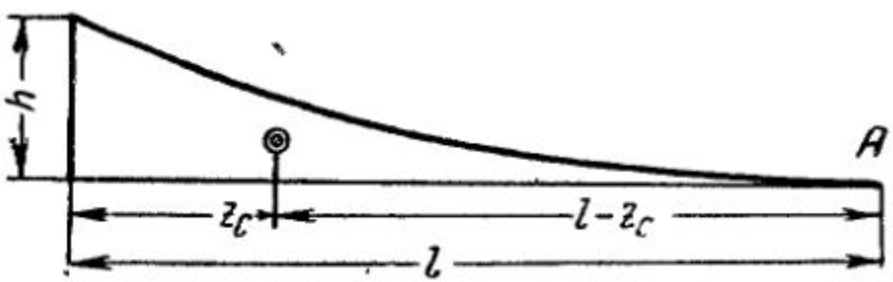
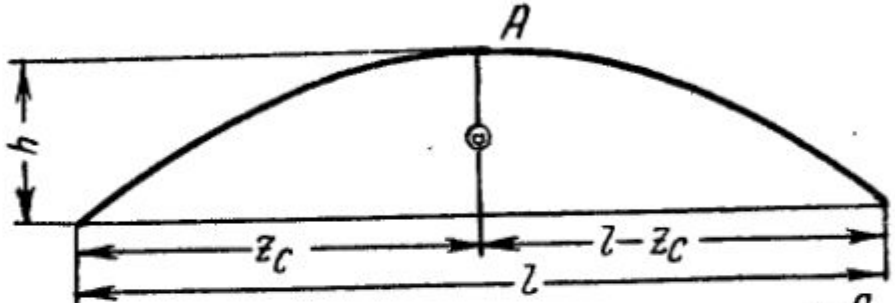
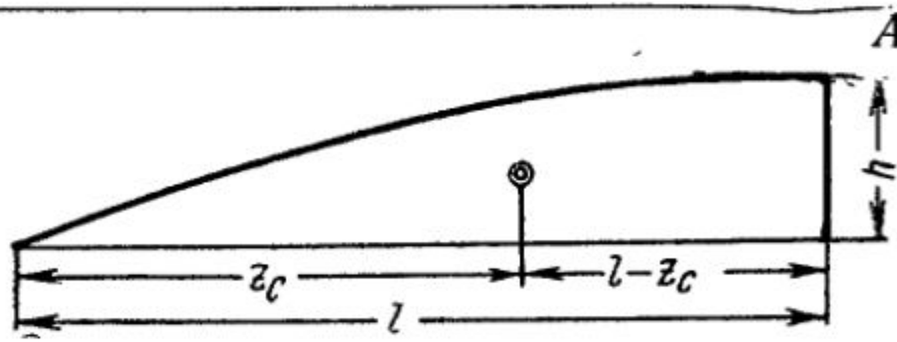
Вид эпюры	Площадь эпюры ω	Расстояние до центра тяжести	
		z_c	$l - z_c$
	$\frac{1}{2} hl$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$
	$\frac{1}{3} hl$	$\frac{1}{4} l$	$\frac{3}{4} l$

Рис.
5

Площади эпюр и расстояния до их центров тяжести

Вид эпюры	Площадь эпюры ω	Расстояние до центра тяжести	
		z_c	$l - z_c$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
	$\frac{2}{3}hl$	$\frac{5}{8}l$	$\frac{3}{8}l$

Примечание. Данные для параболических эпюр справедливы лишь при условии, что эти эпюры имеют вершину в точке *A,* т. е. касательная к эпюре в этой точке параллельна оси балки.

Теорема о взаимности работ (теорема Бетти)

Теорема взаимности работ, подобно теореме Кастилиано, относится к числу общих теорем сопротивления материалов. Она прямо вытекает из принципа независимости действия сил и применима ко всем системам, для которых соблюдается этот принцип.

Рассмотрим упругое тело, к которому приложены сила P_1 в точке A и сила P_2 в точке B (рис. 6).

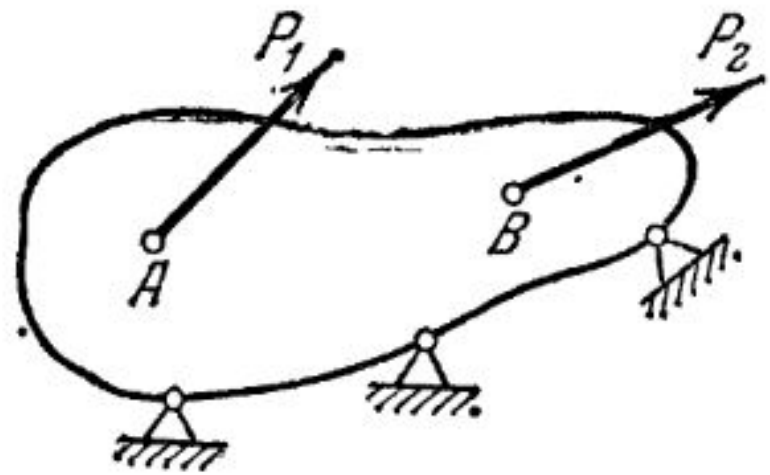


Рис. 6

Определим работу, которую совершат силы P_1 и P_2 при прямом и обратном порядке приложения. Прикладываем сначала в точке *A* силу P_1. Эта сила совершит работу $\frac{1}{2}\mathrm{P}_1\delta_{\mathrm{A1}}$, где δ_{A1} — перемещение точки *A* по направлению силы P_1 вызванное силой P_1. Далее, в точке *B* прикладываем силу P_2. Эта сила совершит работу, которая будет иметь аналогичное выражение - $\frac{1}{2}\mathrm{P}_2\delta_{\mathrm{B2}}$. Одновременно совершит работу и сила P_1 поскольку при приложении силы P_2 произойдет и перемещение точки *A*. Работа силы P_1 будет $\mathrm{P}_1\delta_{\mathrm{A2}}$, где δ_{A2} — перемещение точки A по направлению силы P_1 под действием силы P_2, приложенной в точке B.

В итоге получим сумму работ при прямом порядке приложения сил:

$$\frac{1}{2}P_1\delta_{A1} + \frac{1}{2}P_2\delta_{B2} + P_1\delta_{A2}$$

Теперь приложим сначала силу P_2, а затем P_1. Тогда, очевидно, выражение работы будет следующим:

$$\frac{1}{2}P_2\delta_{B2} + \frac{1}{2}P_1\delta_{A1} + P_2\delta_{B1}$$

Приравнивая работы, находим

$$P_1\delta_{A2} = P_2\delta_{B1} \qquad (10)$$

Полученный результат может быть сформулирован следующим образом:
Работа первой силы на перемещении точки ее приложения под действием второй силы равна работе второй силы на перемещении точки ее приложения под действием первой силы.

В этом и заключается ***теорема взаимности работ.***

Эта теорема приобретает большую общность, если учесть, что здесь, как и при выводе теоремы Кастилиано, под P_1 и P_2 можно понимать не просто силы, а обобщенные силы, а под δ_{A2} и δ_{B1} — обобщенные перемещения.

Иногда в теорему взаимности работ вкладывают более узкое содержание, трактуя ее как ***теорему взаимности перемещений***. Если $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$ выражение (10) принимает вид

$$\delta_{A2} = \delta_{B1} \qquad (11)$$

Перемещение точки А под действием силы, приложенной в точке В, равно перемещению точки В под действием такой же силы, приложенной в точке А.

Сказанное может быть проиллюстрировано на примере балки, нагруженной силой *P* поочередно в точках *A* и *B* (рис. 7). Согласно теореме взаимности перемещений отмеченные на рисунке отрезки δ_{A2} и δ_{B1} равны.

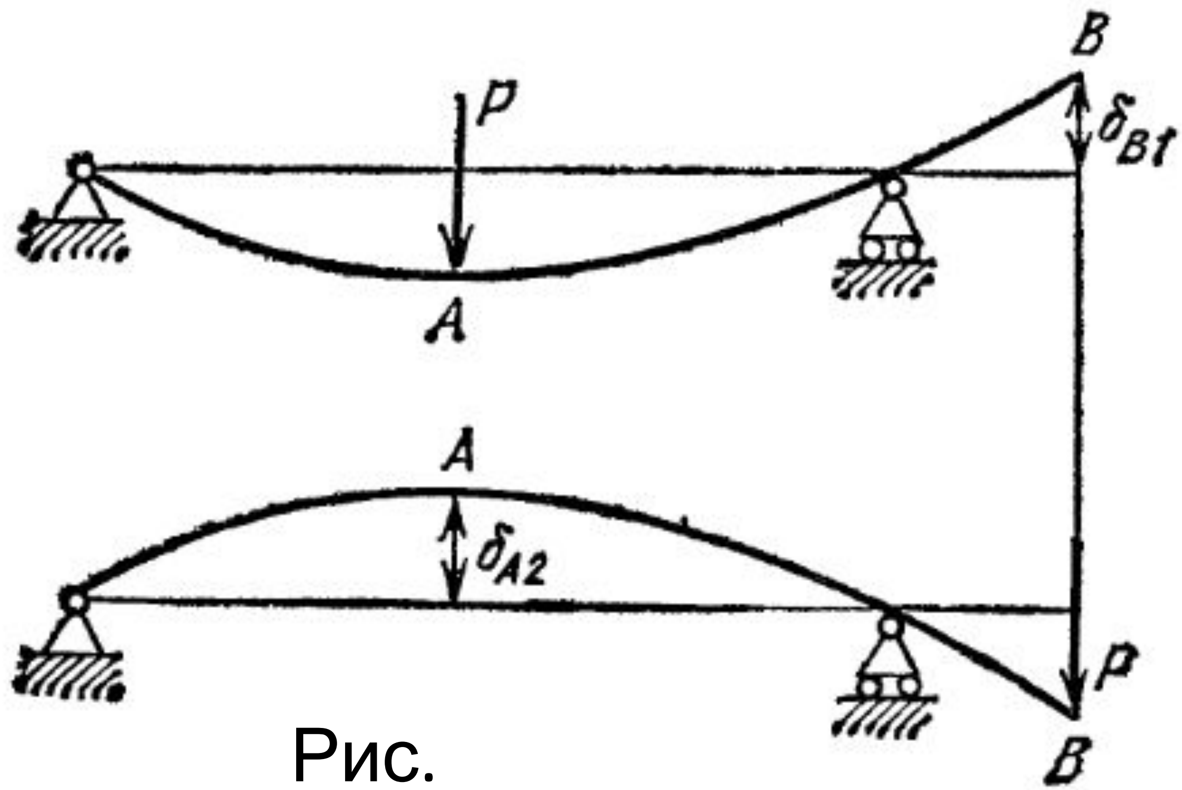


Рис. 7