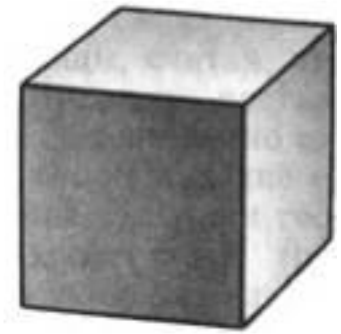
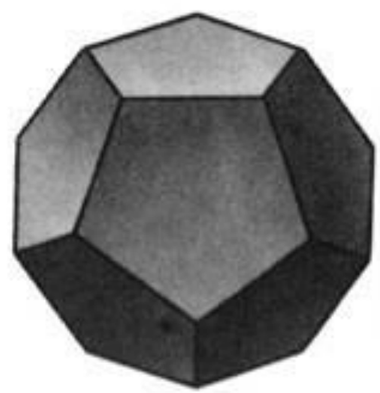
# Понятие правильного многогранника.

# Повторение

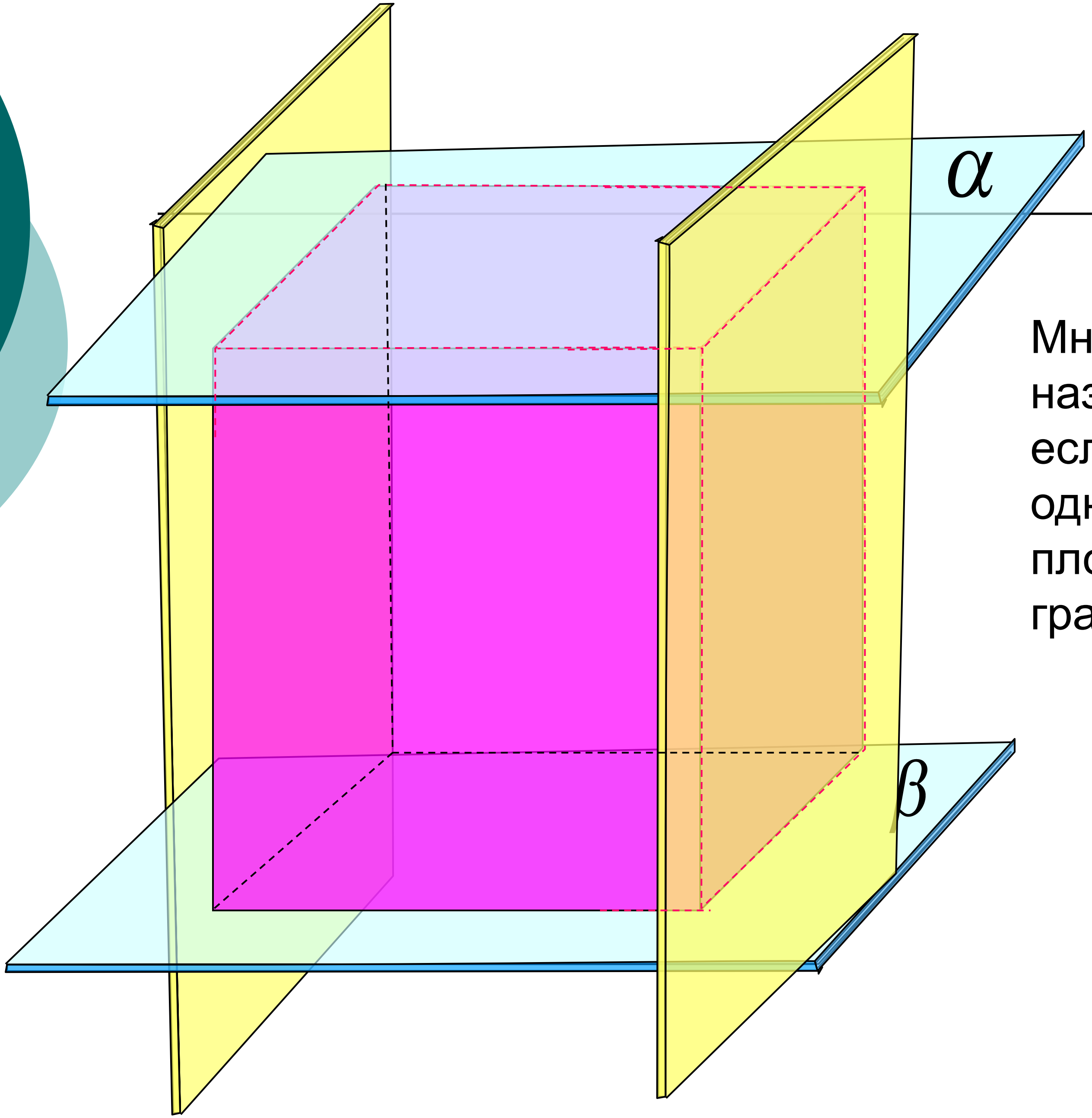
***Многогранником*** называется тело, граница которого является объединением конечного числа многоугольников.





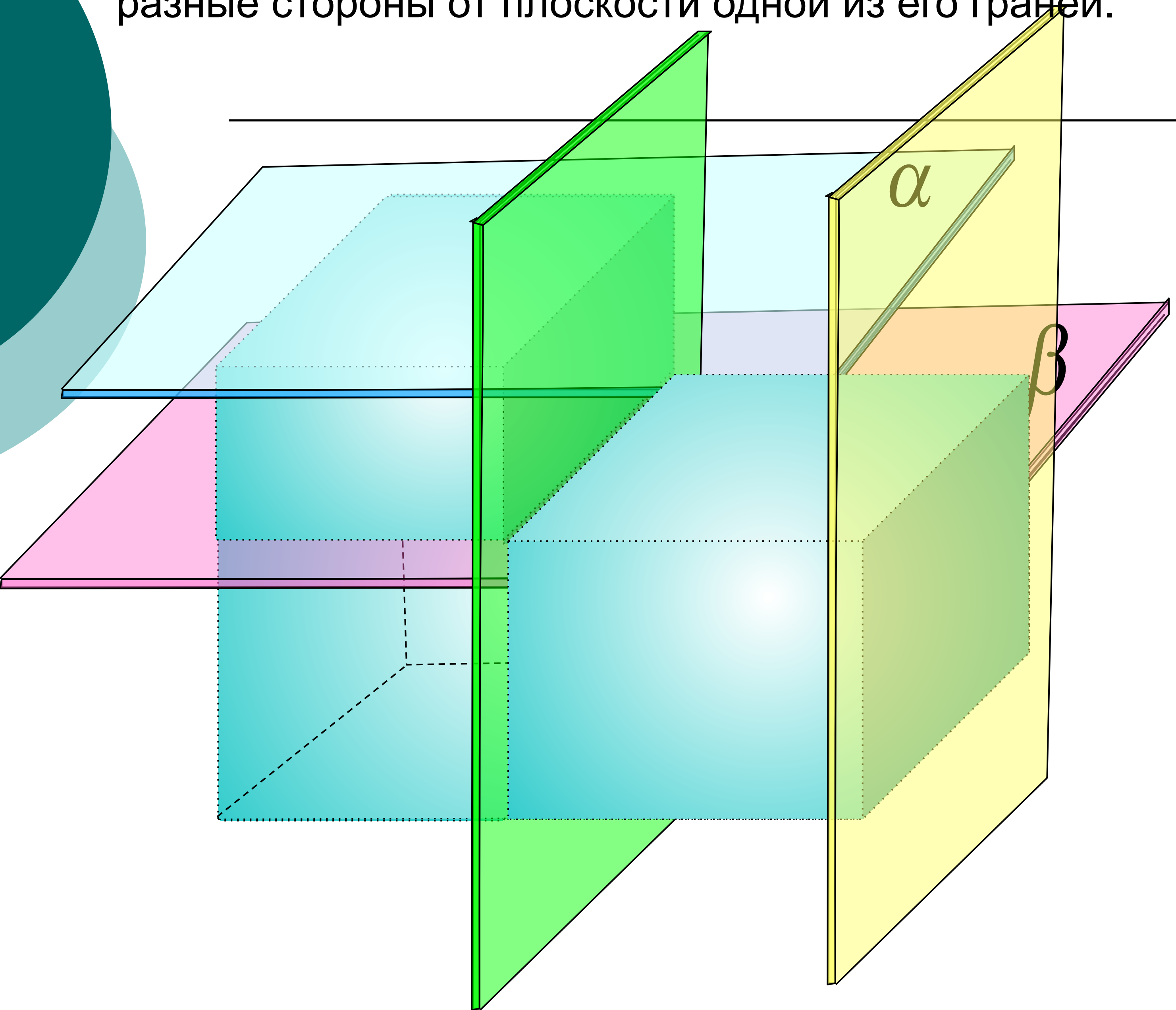
***Многогранники***

- выпуклые
- невыпуклые




Многогранник называется **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

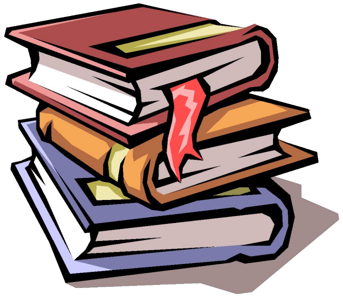
**Невыпуклый многогранник** – многогранник, расположенный по разные стороны от плоскости одной из его граней.



# Понятие правильного многогранника (п.36, с.76)

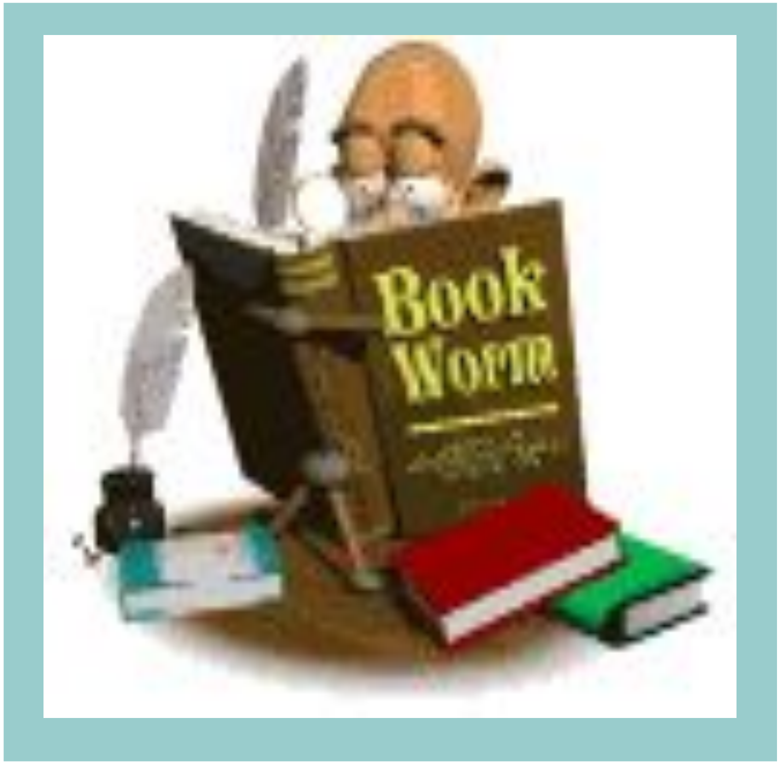
Выпуклый многогранник называется ***правильным***, если все его грани — равные правильные многоугольники, и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер.

Все ребра правильного многогранника равны, все двугранные углы правильного многогранника равны, все многогранные углы правильного многогранника равны.

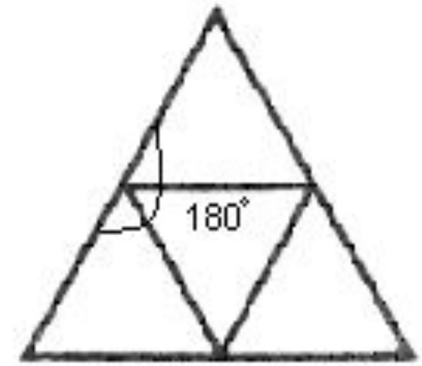


# Правильные многогранники

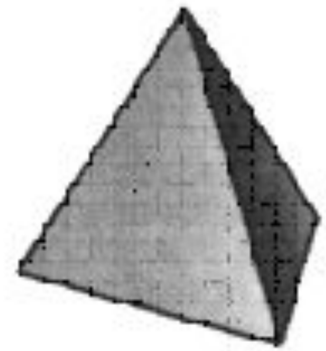
Сколько же их существует?



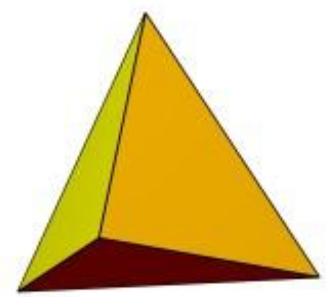
# 1. Тетраэдр




Сначала рассмотрим случай, когда грани многогранника - равносторонние треугольники. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен 60°, три таких угла дадут в развертке 180°. Если теперь склеить развертку в многогранный угол, получится **тетраэдр.**

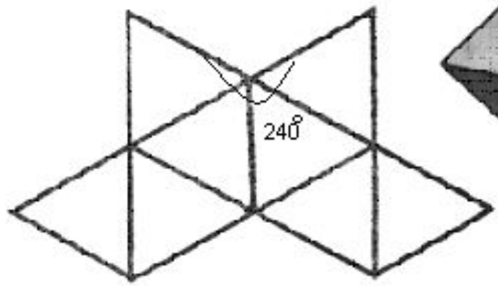


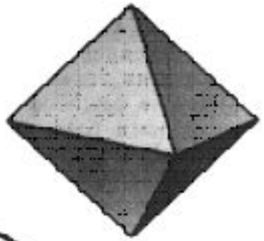
***Тетраэдр*** - *многогранник, в каждой вершине которого встречаются три правильные треугольные грани.*

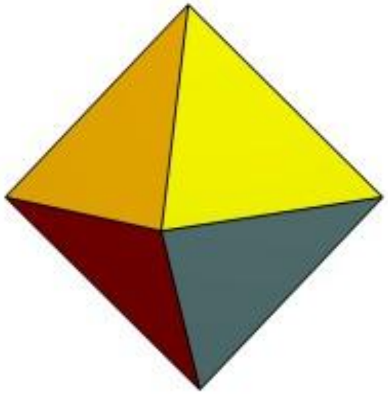


# 2. Октаэдр

Если добавить к развертке вершины еще один треугольник, в сумме получится 240°. Это развертка вершины **октаэдра.**



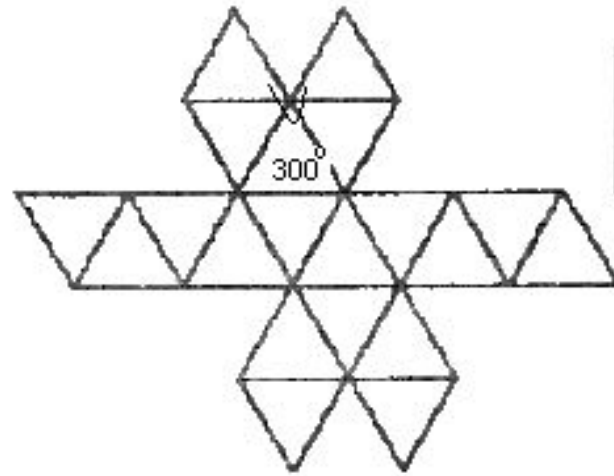



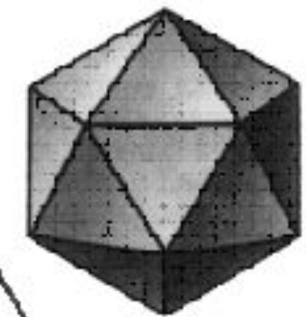


***Октаэдр -*** *восьмигранник, тело, ограниченное восемью правильными треугольниками.*

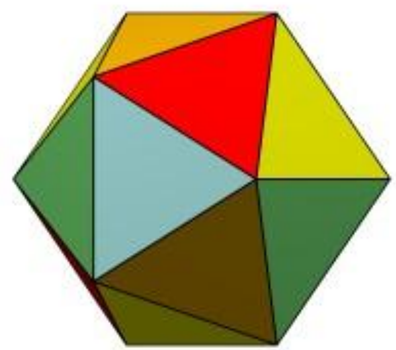
# 3. Икосаэдр

Добавление пятого треугольника даст угол 300° - мы получаем развертку вершины **икосаэдра.**



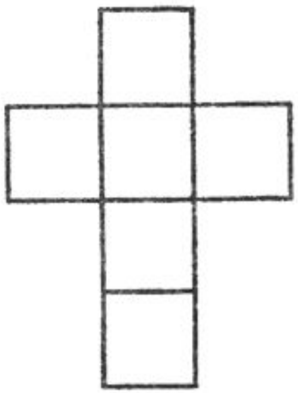
***Икосаэдр -*** *двадцатигранник, тело, ограниченное двадцатью равносторонними треугольниками.*

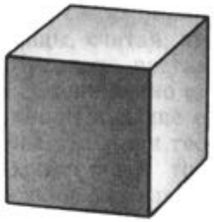


Если же добавить еще один, шестой треугольник, сумма углов станет равной 360° - эта развертка, очевидно, не может соответствовать ни одному выпуклому многограннику.

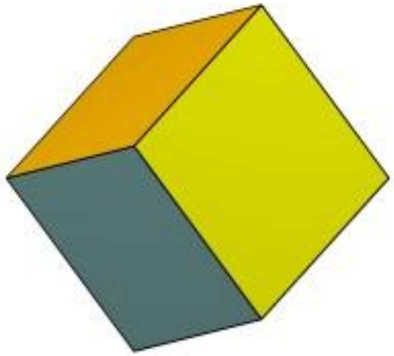
# 4. Куб или правильный гексаэдр

Теперь перейдем к квадратным граням. Развертка из трех квадратных граней имеет угол 3x90°=270° - получается вершина **куба,** который также называют **гексаэдром**.





***Куб или правильный гексаэдр -*** *правильная четырехугольная призма с равными ребрами, ограниченная шестью квадратами.*

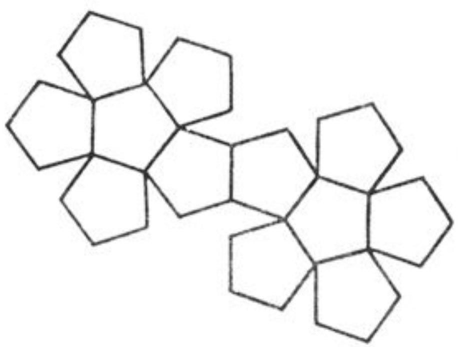


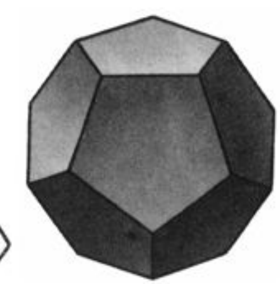
*Добавление еще одного квадрата увеличит угол до 360° - этой развертке уже не соответствует никакой выпуклый многогранник.*

# 5. Додекаэдр

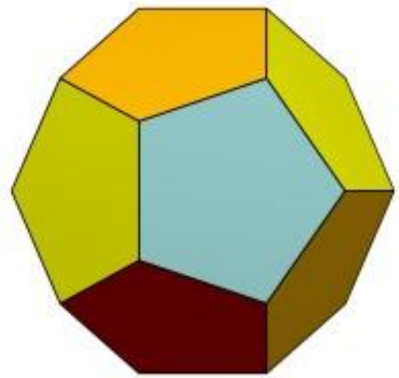
Три пятиугольные грани дают угол развертки 3*108°=324 - вершина **додекаэдра.**

Если добавить еще один пятиугольник, получим больше 360° - поэтому останавливаемся.





***Додекаэдр -*** *двенадцатигранник, тело, ограниченное двенадцатью правильными многоугольниками..*



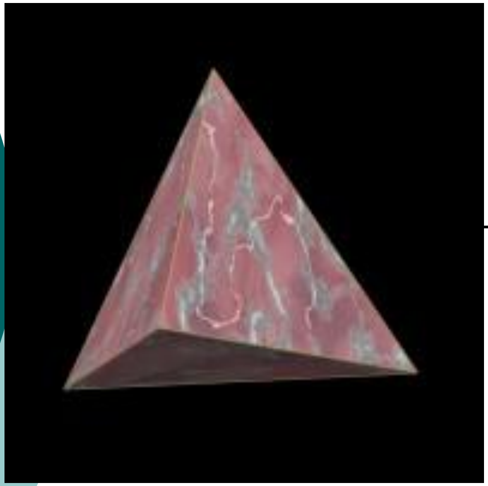
Для шестиугольников уже три грани дают угол развертки 3*120°=360°, поэтому правильного выпуклого многогранника с шестиугольными гранями не существует.

Если же грань имеет еще больше углов, то развертка будет иметь еще больший угол. Значит, правильных выпуклых многогранников с гранями, имеющими шесть и более углов, не существует.

# Вывод:

Мы убедились, что существует лишь пять выпуклых правильных многогранников - **тетраэдр**, **октаэдр** и **икосаэдр** с треугольными гранями, **куб (гексаэдр)** с квадратными гранями и **додекаэдр** с пятиугольными гранями. **Названия этих многогранников пришли из Древней Греции, и в них указывается число граней:**

- **«эдра» - грань**
- **«тетра» - 4**
- **«гекса» - 6**
- **«окта» - 8**
- **«икоса» - 20**
- **«додека» - 12**



Тетраэдр

Октаэдр

Гексаэдр

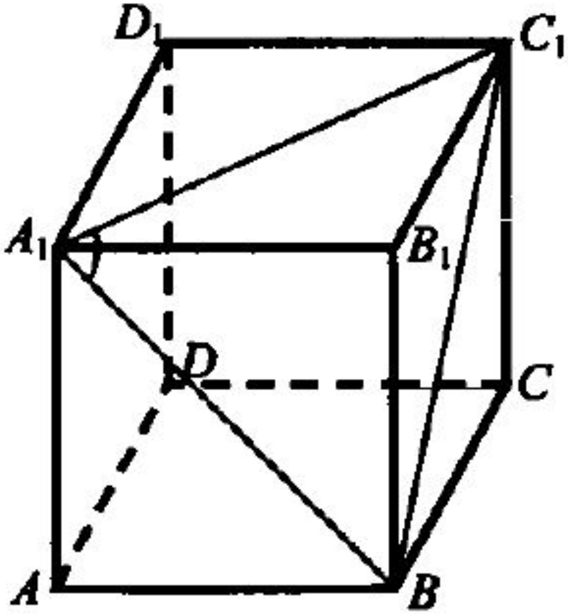
Икосаэдр

Додекаэдр

Подсчитайте количество вершин, граней и ребер у правильных многогранников (воспользуйтесь теоремой Эйлера).

| Правильный многогранник | Число | | |
|---|---|---|---|
| | граней | вершин | рёбер |
| Тетраэдр | | | |
| Куб | | | |
| Октаэдр | | | |
| Додекаэдр | | | |
| Икосаэдр | | | |

## № 279




*Дано:* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
$A_1B$ и $A_1C_1$ – диагонали граней куба, имеющие общий конец.

*Найти:* $\angle BA_1C_1$.

*Решение:*

1) Пусть $a$ – ребро куба. Так как все грани куба – равные квадраты, то диагонали граней равны

$$A_1B = A_1C_1 = BC_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}.$$

2) $\Delta A_1B_1C_1$ – равносторонний, значит, $\angle BA_1C_1 = 60°$.

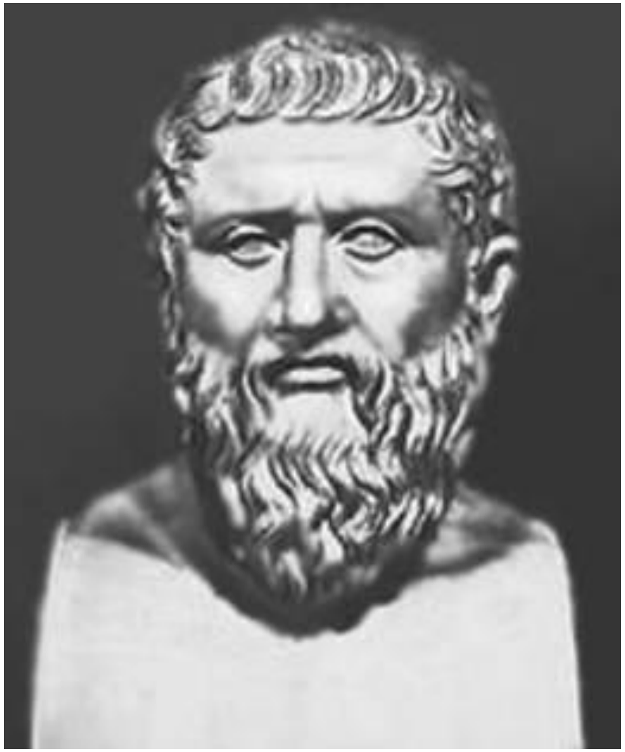
*Ответ*: $60°$.

# Решить самостоятельно №2

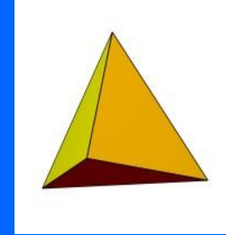
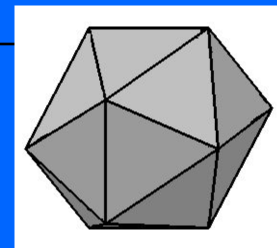
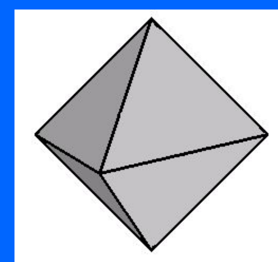
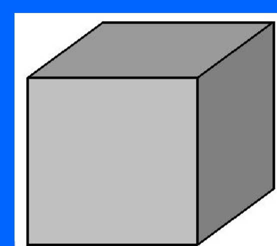
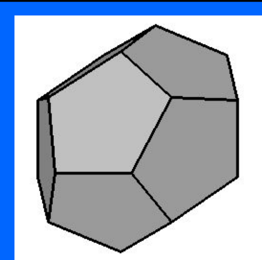
В кубе $KLMNK_1L_1M_1N_1$ из вершины $N_1$ проведены диагонали граней $N_1K$, $N_1M$ и $N_1L_1$ и концы их соединены отрезками. Докажите, что многогранник $N_1KL_1M$ – правильный тетраэдр. Найдите отношение площадей поверхностей куба и тетраэдра.

## Для тех, кто хочет знать больше.

- ***Эти тела еще называют телами Платона***
- ***Платон*** связал с этими телами формы атомов основных стихий природы.

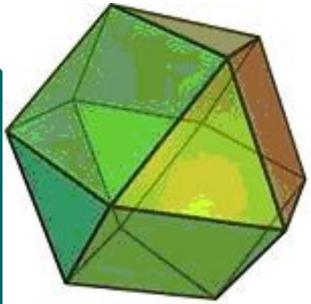


# СТИХИИ

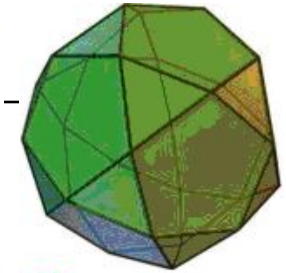
| | | | |
|---|---|---|---|
|  | огонь |  | тетраэдр |
|  | вода |  | икосаэдр |
|  | воздух |  | октаэдр |
|  | земля |  | гексаэдр |
|  | вселенная |  | додекаэдр |

# Тела Архимеда

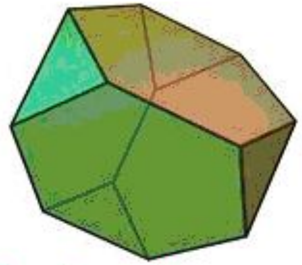
**Архимедовыми телами** называются полуправильные однородные выпуклые многогранники, то есть выпуклые многогранники, все многогранные углы которых равны, а грани - правильные многоугольники нескольких типов.



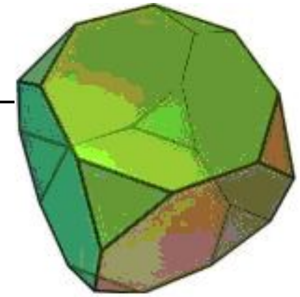
Кубооктаэдр



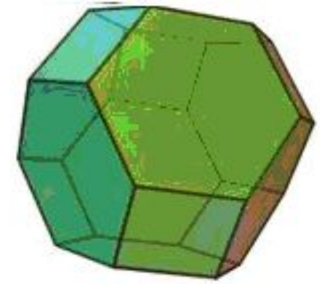
Икосододекаэдр



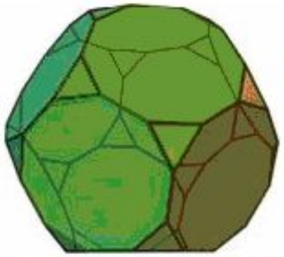
Усечённый тетраэдр



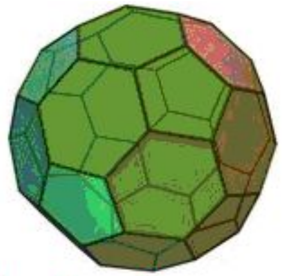
Усечённый куб



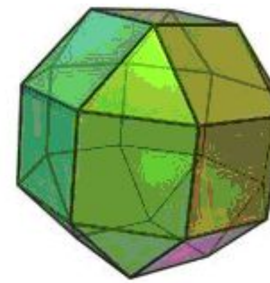
Усечённый октаэдр



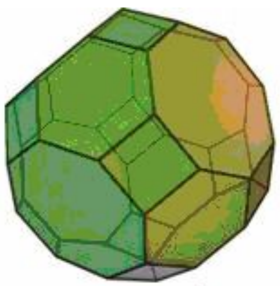
Усечённый додекаэдр



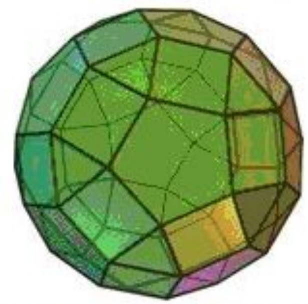
Усечённый икосаэдр



Ромбокубоктаэдр



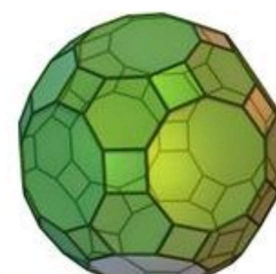
усечённый кубоктаэдр



Ромбоикосододекаэдр

Курносый куб

Курносый додекаэдр

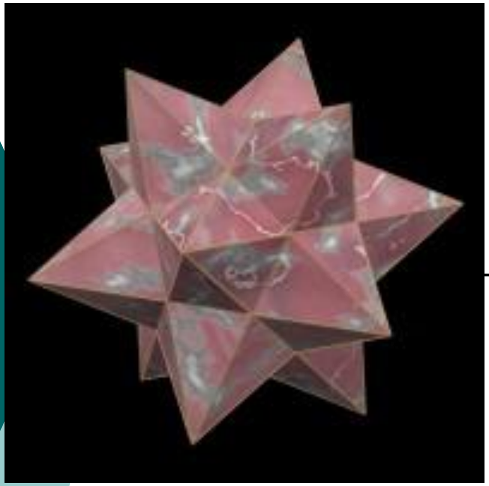


усечённый икосододекаэдр

# Тела Кеплера-Пуансо

Среди невыпуклых однородных многогранников существуют аналоги платоновых тел - четыре *правильных невыпуклых однородных многогранника или тела Кеплера-Пуансо.*

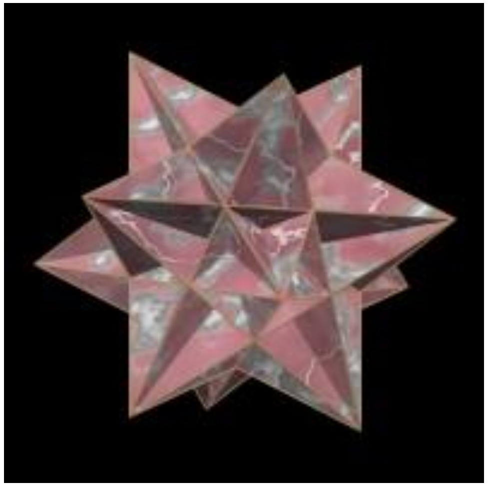
Как следует из их названия, тела Кеплера-Пуансо - это невыпуклые однородные многогранники, все грани которых - одинаковые правильные многоугольники, и все многогранные углы которых равны. Грани при этом могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми.



<u>*Малый звездчатый додекаэдр*</u>

<u>*Большой звездчатый додекаэдр*</u>

<u>*Большой додекаэдр*</u>



<u>*Большой икосаэдр*</u>