Тема 3. Численные методы линейной алгебры. Примеры выполнения заданий в Mathcad

Метод исключения Гаусса

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса.

$$
\begin{aligned}
2{,}6x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}5x_3 &= 3{,}7\\
1{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 2{,}9x_3 &= 3{,}2\\
2{,}8x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}8x_3 &= 2{,}8
\end{aligned}
$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием средств программы Mathcad.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3.7 \\ 3.2 \\ 2.8 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2.094 \\ -0.465 \\ -1.015 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса

1-й способ

Метод исключения Гаусса

Прямой ход

1-й шаг

$j := 3..1 \quad B_1 := \frac{B_1}{A_{1,1}} \quad A_{1,j} := \frac{A_{1,j}}{A_{1,1}} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 3.2 \\ 2.8 \end{pmatrix}$

$B_2 := B_2 - B_1 \cdot A_{2,1} \quad A_{2,j} := A_{2,j} - A_{1,j} \cdot A_{2,1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 0 & 7.181 & -4.342 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 1.065 \\ 2.8 \end{pmatrix}$

$B_3 := B_3 - B_1 \cdot A_{3,1} \quad A_{3,j} := A_{3,j} - A_{1,j} \cdot A_{3,1} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 0 & 7.181 & -4.342 \\ 0 & 0.131 & 1.108 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 1.065 \\ -1.185 \end{pmatrix}$

Метод исключения Гаусса

2-й шаг

$$j := 3..2 \quad B_2 := \frac{B_2}{A_{2,2}} \quad A_{2,j} := \frac{A_{2,j}}{A_{2,2}} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 0 & 1 & -0.605 \\ 0 & 0.131 & 1.108 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 0.148 \\ -1.185 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := B_3 - B_2 \cdot A_{3,2} \quad A_{3,j} := A_{3,j} - A_{2,j} \cdot A_{3,2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 0 & 1 & -0.605 \\ 0 & 0 & 1.187 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 0.148 \\ -1.204 \end{pmatrix}$$

3-й шаг

$$B_3 := \frac{B_3}{A_{3,3}} \quad A_{3,3} := 1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 \\ 0 & 1 & -0.605 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1.423 \\ 0.148 \\ -1.015 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса

Обратный ход

$$X_3 := B_3 = -1.015$$

$$X_2 := B_2 - A_{2,3} \cdot X_3 = -0.465$$

$$X_1 := B_1 - \sum_{j=2}^{3} \left(A_{1,j} \cdot X_j\right) = 2.094$$

Метод исключения Гаусса

2-й способ

Формирование расширенной матрицы

$$A^{\langle 4 \rangle} := B$$

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 & 3.7 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса

Метод исключения Гаусса

Прямой ход

1-й шаг

$j := 4 .. 1$

$$A_{1,j} := \frac{A_{1,j}}{A_{1,1}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,j} := A_{2,j} - A_{1,j} \cdot A_{2,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & 1.065 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{1,j} \cdot A_{3,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & 1.065 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.185 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса

2-й шаг

$j := 4..2 \qquad A_{2,j} := \frac{A_{2,j}}{A_{2,2}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.185 \end{pmatrix}$

$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{2,j} \cdot A_{3,2} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0 & 1.187 & -1.204 \end{pmatrix}$

3-й шаг

$j := 4..3 \qquad A_{3,j} := \frac{A_{3,j}}{A_{3,3}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0 & 1 & -1.015 \end{pmatrix}$

Метод исключения Гаусса

Обратный ход

$$X_3 := A_{3,4} = -1.015$$

$$X_2 := A_{2,4} - A_{2,3} \cdot X_3 = -0.465$$

$$X_1 := A_{1,4} - \sum_{j=2}^{3} \left(A_{1,j} \cdot X_j\right) = 2.094$$

или

$$B := A^{\langle 4 \rangle}$$

$$X_3 := B_3 = -1.015$$

$$X_2 := B_2 - A_{2,3} \cdot X_3 = -0.465$$

$$X_1 := B_1 - \sum_{j=2}^{3} \left(A_{1,j} \cdot X_j\right) = 2.094$$

Метод исключения Гаусса с выбором главного элемента

Формирование расширенной матрицы

$A^{\langle 4\rangle} := B$

$$A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 & 3.7 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

Прямой ход

1-й шаг

Перестановка строк

$A := A^{T}$ $\quad D := A^{\langle 1\rangle}$ $\quad A^{\langle 1\rangle} := A^{\langle 3\rangle}$ $\quad A^{\langle 3\rangle} := D$ $\quad A := A^{T}$

$$A = \begin{pmatrix} 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.6 & -1.7 & 2.5 & 3.7 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса-Жордана

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом исключения Гаусса-Жордана.

$$2{,}6x_1 - 1{,}7x_2 + 2{,}5x_3 = 3{,}7$$
$$1{,}5x_1 + 6{,}2x_2 - 2{,}9x_3 = 3{,}2$$
$$2{,}8x_1 - 1{,}7x_2 + 3{,}8x_3 = 2{,}8$$

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$$A := \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3.7 \\ 3.2 \\ 2.8 \end{pmatrix}$$

Формирование расширенной матрицы

$$A^{\langle 4 \rangle} := B \qquad A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 & 3.7 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса-Жордана

Прямой ход

1-й шаг

$j := 4..1$

$$A_{1,j} := \frac{A_{1,j}}{A_{1,1}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 3.2 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,j} := A_{2,j} - A_{1,j} \cdot A_{2,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & 1.065 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 2.8 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{1,j} \cdot A_{3,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & 1.065 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.185 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса-Жордана

2-й шаг

$j := 4 .. 2$

$$A_{2,j} := \frac{A_{2,j}}{A_{2,2}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 1.423 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.185 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,j} := A_{1,j} - A_{2,j} \cdot A_{1,2} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 1.52 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.185 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{2,j} \cdot A_{3,2} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 1.52 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0 & 1.187 & -1.204 \end{pmatrix}$$

Метод исключения Гаусса-Жордана

3-й шаг

$j := 4..3 \qquad A_{3,j} := \frac{A_{3,j}}{A_{3,3}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 1.52 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0 & 1 & -1.015 \end{pmatrix}$

$A_{1,j} := A_{1,j} - A_{3,j} \cdot A_{1,3} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.094 \\ 0 & 1 & -0.605 & 0.148 \\ 0 & 0 & 1 & -1.015 \end{pmatrix}$

$A_{2,j} := A_{2,j} - A_{3,j} \cdot A_{2,3} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2.094 \\ 0 & 1 & 0 & -0.465 \\ 0 & 0 & 1 & -1.015 \end{pmatrix}$

Решение системы

$X := A^{\langle 4 \rangle} = \begin{pmatrix} 2.094 \\ -0.465 \\ -1.015 \end{pmatrix}$

Вычисление определителя

Определитель треугольной матрицы равен произведению ее диагональных элементов

Задание. Вычислить определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix}$$

Вычисление определителя матрицы с использованием средств программы Mathcad.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \qquad |A| = 22.157$$

Вычисление определителя

Метод исключения Гаусса

1-й шаг

$j := 3\,..\,1$ $\qquad A_{2,j} := A_{2,j} - \dfrac{A_{1,j} \cdot A_{2,1}}{A_{1,1}}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 0 & 7.181 & -4.342 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix}$

$A_{3,j} := A_{3,j} - \dfrac{A_{1,j} \cdot A_{3,1}}{A_{1,1}}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 0 & 7.181 & -4.342 \\ 0 & 0.131 & 1.108 \end{pmatrix}$

2-й шаг

$j := 3\,..\,2$ $\qquad A_{3,j} := A_{3,j} - \dfrac{A_{2,j} \cdot A_{3,2}}{A_{2,2}}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 0 & 7.181 & -4.342 \\ 0 & 0 & 1.187 \end{pmatrix}$

Вычисление определителя

$$D := A_{1,1} \cdot A_{2,2} \cdot A_{3,3} = 22.157$$

Вычисление обратной матрицы

$$[A][A]^{-1} = [E]$$

Задание. Вычислить обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы с использованием средств программы Mathcad.

$$ORIGIN := 1$$

$$A := \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 \end{pmatrix} \qquad A1 := A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.841 & 0.1 & -0.477 \\ -0.624 & 0.13 & 0.51 \\ -0.899 & -0.015 & 0.843 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

Метод исключения Гаусса-Жордана

Формирование расширенной матрицы

$$E := \mathrm{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A := \mathrm{augment}(A, E) \qquad A = \begin{pmatrix} 2.6 & -1.7 & 2.5 & 1 & 0 & 0 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 0 & 1 & 0 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

Прямой ход

1-й шаг

$$j := 6 \,..\, 1 \qquad A_{1,j} := \frac{A_{1,j}}{A_{1,1}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 0.385 & 0 & 0 \\ 1.5 & 6.2 & -2.9 & 0 & 1 & 0 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{2,j} := A_{2,j} - A_{1,j} \cdot A_{2,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 0.385 & 0 & 0 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & -0.577 & 1 & 0 \\ 2.8 & -1.7 & 3.8 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{1,j} \cdot A_{3,1} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 0.385 & 0 & 0 \\ 0 & 7.181 & -4.342 & -0.577 & 1 & 0 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.077 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

2-й шаг

$$A_{2,j} := \frac{A_{2,j}}{A_{2,2}} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -0.654 & 0.962 & 0.385 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -0.605 & -0.08 & 0.139 & 0 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.077 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{1,j} := A_{1,j} - A_{2,j} \cdot A_{1,2} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 0.332 & 0.091 & 0 \\ 0 & 1 & -0.605 & -0.08 & 0.139 & 0 \\ 0 & 0.131 & 1.108 & -1.077 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3,j} := A_{3,j} - A_{2,j} \cdot A_{3,2} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 0.332 & 0.091 & 0 \\ 0 & 1 & -0.605 & -0.08 & 0.139 & 0 \\ 0 & 0 & 1.187 & -1.066 & -0.018 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление обратной матрицы

3-й шаг

$j := 6..3$ $\qquad A_{3,j} := \dfrac{A_{3,j}}{A_{3,3}}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.566 & 0.332 & 0.091 & 0 \\ 0 & 1 & -0.605 & -0.08 & 0.139 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.899 & -0.015 & 0.843 \end{pmatrix}$

$A_{1,j} := A_{1,j} - A_{3,j} \cdot A_{1,3}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.841 & 0.1 & -0.477 \\ 0 & 1 & -0.605 & -0.08 & 0.139 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.899 & -0.015 & 0.843 \end{pmatrix}$

$A_{2,j} := A_{2,j} - A_{3,j} \cdot A_{2,3}$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.841 & 0.1 & -0.477 \\ 0 & 1 & 0 & -0.624 & 0.13 & 0.51 \\ 0 & 0 & 1 & -0.899 & -0.015 & 0.843 \end{pmatrix}$

Обратная матрица

$A2 := \mathrm{submatrix}(A, 1, 3, 4, 6)$ $\qquad A2 = \begin{pmatrix} 0.841 & 0.1 & -0.477 \\ -0.624 & 0.13 & 0.51 \\ -0.899 & -0.015 & 0.843 \end{pmatrix}$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

Найти решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом с точностью 10^{-3}.

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

$$5x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 4$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

$$x_1 = \frac{3}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{1}{6}x_1 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{6}$$

$$x_3 = \frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{4}{5}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

Решение системы уравнений с использованием средств программы Mathcad.

Решение исходной системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение преобразованной системы уравнений

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad X := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

Реализация метода простой итерации в Mathcad

Метод итераций Якоби

Начальные приближения

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

1-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.6 \qquad |x11 - x1| = 0.6$$

$$x21 := \frac{1}{6}x1 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.167 \qquad |x21 - x2| = 0.167$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x1 + \frac{2}{5}\cdot x2 + \frac{4}{5} = 0.8 \qquad |x31 - x3| = 0.8$$

$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

2-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.54 \qquad |x11 - x1| = 0.06$$

$$x21 := \frac{1}{6}x1 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.8 \qquad |x21 - x2| = 0.633$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x1 + \frac{2}{5}\cdot x2 + \frac{4}{5} = 0.747 \qquad |x31 - x3| = 0.053$$

$$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

3-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.931 \qquad |x11 - x1| = 0.391$$

$$x21 := \frac{1}{6}x1 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.754 \qquad |x21 - x2| = 0.046$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x1 + \frac{2}{5}\cdot x2 + \frac{4}{5} = 1.012 \qquad |x31 - x3| = 0.265$$

$$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

21-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 1 \qquad |x11 - x1| = 8.109\times 10^{-4}$$

$$x21 := \frac{1}{6}x1 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 1 \qquad |x21 - x2| = 7.728\times 10^{-4}$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x1 + \frac{2}{5}\cdot x2 + \frac{4}{5} = 1 \qquad |x31 - x3| = 6.448\times 10^{-4}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

Реализация итерационного метода Гаусса-Зейделя в Mathcad

Начальные приближения

$x1 := 0 \qquad x2 := 0 \qquad x3 := 0$

1-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.6 \qquad |x11 - x1| = 0.6$$

$$x21 := \frac{1}{6}x11 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.267 \qquad |x21 - x2| = 0.267$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x11 + \frac{2}{5}\cdot x21 + \frac{4}{5} = 0.787 \qquad |x31 - x3| = 0.787$$

$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

2-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.603 \qquad |x11 - x1| = 2.667 \times 10^{-3}$$

$$x21 := \frac{1}{6}x11 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.792 \qquad |x21 - x2| = 0.525$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x11 + \frac{2}{5}\cdot x21 + \frac{4}{5} = 0.996 \qquad |x31 - x3| = 0.209$$

$$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

3-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 0.876 \qquad |x11 - x1| = 0.273$$

$$x21 := \frac{1}{6}x11 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 0.977 \qquad |x21 - x2| = 0.185$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x11 + \frac{2}{5}\cdot x21 + \frac{4}{5} = 1.016 \qquad |x31 - x3| = 0.019$$

$$x1 := x11 \qquad x2 := x21 \qquad x3 := x31$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений с использованием метода итераций

8-я итерация

$$x11 := \frac{3}{5}x2 - \frac{1}{5}\cdot x3 + \frac{3}{5} = 1 \qquad |x11 - x1| = 6.829 \times 10^{-4}$$

$$x21 := \frac{1}{6}x11 + \frac{2}{3}\cdot x3 + \frac{1}{6} = 1 \qquad |x21 - x2| = 1.786 \times 10^{-4}$$

$$x31 := -\frac{1}{5}x11 + \frac{2}{5}\cdot x21 + \frac{4}{5} = 1 \qquad |x31 - x3| = 6.512 \times 10^{-5}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов с использованием средств программы Mathcad

$ORIGIN := 1$

$$M := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 9.348 \\ 3.73 \\ 1.921 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$X := \mathrm{eigenvecs}(M) = \begin{pmatrix} -0.365 & -0.776 & 0.515 \\ -0.637 & -0.195 & -0.746 \\ -0.679 & 0.6 & 0.423 \end{pmatrix}$$

$$X^{T} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

Вычисление собственных значений

$$E := \text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(\lambda) := M - \lambda \cdot E \rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 5-\lambda & 3 \\ 1 & 3 & 6-\lambda \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$|A(\lambda)| \rightarrow 15\cdot\lambda^2 - \lambda^3 - 60\cdot\lambda + 67$$

$$a := \begin{pmatrix} 67 \\ -60 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{polyroots}(a) = \begin{pmatrix} 1.921 \\ 3.73 \\ 9.348 \end{pmatrix} \qquad \text{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 9.348 \\ 3.73 \\ 1.921 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

Вычисление собственных векторов

$$\lambda_1 := 1.921$$

$$A := A(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2.079 & 2 & 1 \\ 2 & 3.079 & 3 \\ 1 & 3 & 4.079 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4.662 \times 10^{-3}$$

$$\mathrm{eigenvals}(M) = \begin{pmatrix} 9.348 \\ 3.73 \\ \boxed{1.921} \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$B := \begin{pmatrix} 1 \\ -A_{2,1} \\ -A_{3,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$i := 2..3 \qquad A_{1,1} := 1 \qquad A_{1,i} := 0 \qquad A_{i,1} := 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3.079 & 3 \\ 0 & 3 & 4.079 \end{pmatrix}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$X := A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.449 \\ 0.821 \end{pmatrix}$$

$$\alpha := \sqrt{X^T X} \qquad X := \frac{X}{\alpha} = \begin{pmatrix} 0.515 \\ -0.746 \\ 0.422 \end{pmatrix}$$

$$X := \mathrm{eigenvecs}(M) = \begin{pmatrix} -0.365 & -0.776 & \boxed{0.515} \\ -0.637 & -0.195 & \boxed{-0.746} \\ -0.679 & 0.6 & \boxed{0.423} \end{pmatrix}$$

Спасибо за внимание!