# 6. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

## 6.1 ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Стержневая система, способная воспринять произвольную нагрузку, должна быть закреплена таким образом, чтобы она не могла перемещаться как абсолютно твердое тело. В случае действия плоской системы сил минимальное количество связей, необходимое для закрепления системы, равно трем. Они являются ***абсолютно необходимыми***, поскольку удаление хотя бы одной из них превращает систему в ***геометрически изменяемую*** (механизм), т.е. в такую систему, где перемещения точек могут происходить без деформации стержней. Реакции абсолютно необходимых связей могут быть найдены из уравнений статики. Балки и другие стержневые системы, закрепленные таким образом, называются ***статически определимыми***.

На практике часто встречаются системы, в которых количество наложенных связей больше, чем нужно для обеспечения геометрической неизменности (например, балка на трех и более шарнирных опорах; жестко заделанная на одном конце и имеющая промежуточную шарнирную опору и т.п.). В этом смысле некоторые связи являются «лишними». В системах с лишними связями все реакции нельзя определить только из уравнений статики. Поэтому такие системы называются ***статически неопределимыми***.

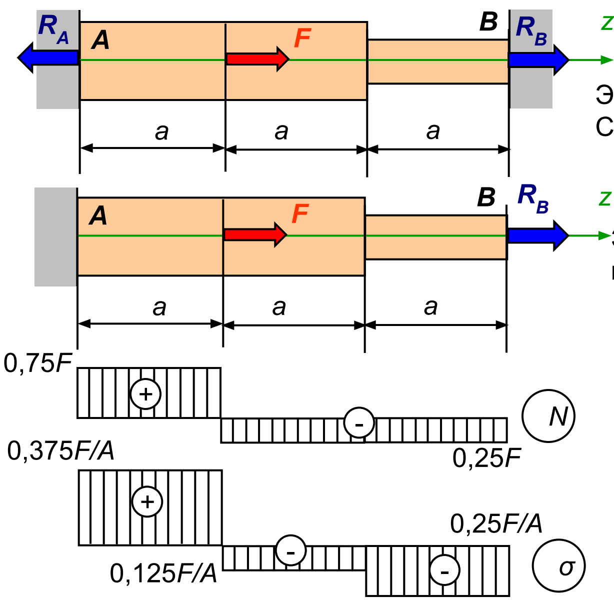
В статически неопределимых системах число неизвестных опорных реакций всегда превышает число возможных уравнений равновесия. «Лишние» реакции называют лишними неизвестными. Число лишних неизвестных определяет ***степень статической неопределимости*** системы.

# 6.2 АНАЛИЗ СИСТЕМ С ОДНОЙ ЛИШНЕЙ СВЯЗЬЮ

### 6.2.1. Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии

Статически неопределимые задачи решаются последовательным рассмотрением *статической*, *геометрической* и *физической* сторон, в результате чего получается полная система уравнений, позволяющая найти искомые усилия. Общий порядок решения определяется вышесказанным, конкретные шаги и особенности рассмотрим на примерах:

**Пример 1**. Стержень переменного сечения (2*A* и *A*) жестко заделан с двух сторон и нагружен продольной силой. Построить эпюры *N* и *σ*.




1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

2. *Статика* : Составляем **уравнение равновесия**: $\sum Z_i = 0;$ $\boxed{-R_A + F + R_B = 0.}$

Это единственное уравнение равновесия, которое можно составить для линейной системы сил. Следовательно система один раз статически неопределима.

3. *Геометрия*:
Составляем **уравнение совместности деформаций**: $\Delta l = 0;$ $\boxed{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.}$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

4. *Физика*: Записываем **соотношения связи деформаций с усилиями**:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A}; \qquad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}.$$

Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (5 уравнений и 5 неизвестных – 2 реакции и 3 перемещения) . Подставляем соотношения упругости в уравнения совместности:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} = 0. \Rightarrow R_A + 3R_B = 0. \Rightarrow R_A = -3R_B.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия: $3R_B + F + R_B = 0 \Rightarrow$ $\boxed{R_B = -\frac{F}{4}; \quad R_A = \frac{3F}{4}.}$

После определения опорных реакций можно построить **эпюру продольных сил** вычисление значений по участкам:
$N_1 = R_A = 3F/4$,
$N_2 = N_3 = R_B = F/4$.
В сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, получился скачок, равный величине этой силы.

**Эпюра нормальных напряжений** также строится вычислением значений напряжений по участкам:
$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 3F/8A$,
$\sigma_2 = N_2 / A_2 = F/8A$,
$\sigma_3 = N_3 / A_3 = F/4A$.
В сечении резкого изменения площади получился скачок.

...ки определимой ...тбрасыванием

Составляем **уравнение совместности деформаций**: $\Delta l = 0;$ $\boxed{\Delta l_F + \Delta l_R = 0.}$ или $\boxed{\Delta l_R = -\Delta l_F.}$

...ня, которую обеспечивала "лишняя" связь (правая жесткая заделка) до ее ...аправление при отдельном действии внешней нагрузки и реакции этой связи.

$$\Delta l_R = \sum \frac{N_i(R_B) l_i}{EA_i} = \frac{R_B 2a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} = \frac{2R_B a}{EA}; \qquad \Delta l_F = \sum \frac{N_i(R_F) l_i}{EA_i} = \frac{Fa}{E2A};$$

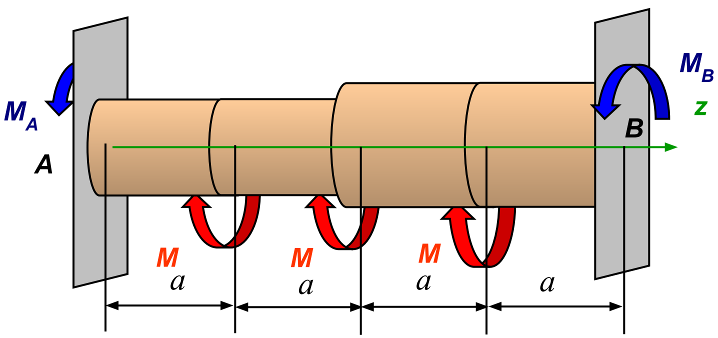
$$\frac{2R_B a}{EA} = -\frac{Fa}{E2A}; \Rightarrow \boxed{R_B = -\frac{F}{4}.}$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия и получим величину второй реакции ($R_B$).

## 6.2.2 Статически неопределимые системы при кручении

Решаются так же, как и при других видах деформации, т.е. последовательно раскрываются три стороны задачи (статика, геометрия и физика). Специфика лишь состоит в том, что составляются другие уравнения равновесия, сопоставляются угловые перемещения (углы закручивания) и используется физические соотношения упругости, связывающие деформации и усилия при кручении.

**Пример.** Вал круглого сечения имеет ступенчатое изменение диаметра ($d$ = 0.707$D$) и нагружен тремя скручивающими моментами $M$.



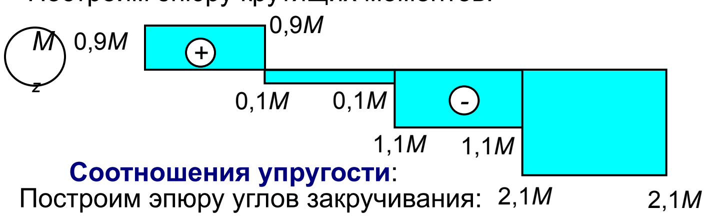

1. *Статика* – Отбрасываем жесткие заделки, заменяем их реактивными моментами:

Составляем **моментное уравнение равновесия** относительно оси вала:

$$\sum M_{zi} = 0; \quad M_A - M - M - M + M_B = 0. \qquad \text{Или:} \quad \boxed{M_A - 3M + M_B = 0.}$$

Это уравнение единственное, которое связывает нагрузку и реактивные моменты. Все другие (сумма проекций на координатные оси и суммы моментов относительно осей x, y) обращаются в тождества. Следовательно, задача является статически неопределимой с одним “лишним” неизвестным.

Построим эпюру крутящих моментов:




2. *Геометрия* – При наличии на обоих концах вала неподвижных заделок сумма углов закручивания на каждом из участков при любом нагружении должна быть равной нулю - **уравнение совместности деформаций**):

$$\boxed{\sum \varphi_i = 0; \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0.}$$

3. *Физика* – На каждом из участков угол закручивания связан с крутящим моментом в сечении (**соотношения упругости**):

$$\varphi_1 = \frac{M_z^I l_1}{GI_{p1}} = \frac{M_A a}{G\dfrac{\pi(0{,}707D)^4}{32}} = \frac{32\cdot 4M_A a}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_2 = \frac{M_z^{II} l_2}{GI_{p2}} = \frac{(M_A - M)a}{G\dfrac{\pi(0{,}707D)^4}{32}} = \frac{32\cdot 4(M_A - M)a}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_3 = \frac{M_z^{III} l_2}{GI_{p3}} = \frac{(-M_B + M)a}{G\dfrac{\pi D^4}{32}} = \frac{32(-M_B + M)a}{G\pi D^4};$$

$$\varphi_4 = \frac{M_z^{IV} l_4}{GI_{p4}} = \frac{(-M_B)a}{G\dfrac{\pi D^4}{32}} = \frac{32(-M_B)a}{G\pi D^4}.$$

Полученные 6 уравнений образуют полную систему уравнений с 6-ю неизвестными (2 реактивных момента и 4 угла закручивания).

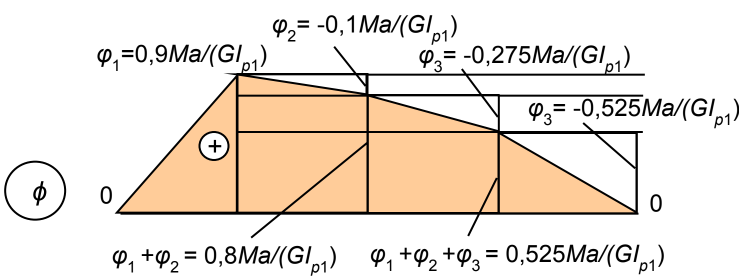
Подставим соотношения упругости в уравнение совместности. Одинаковые сомножители вынесем за скобки и сократим:

$$4M_A + 4(M_A - M) + (-M_B + M) - M_B = 0.$$

$$\text{Или:} \quad 8M_A - 3M - 2M_B = 0.$$

**Соотношения упругости**:

Построим эпюру углов закручивания:




Выразим, например, $M_A$ из уравнения равновесия через $M_B$ и подставим в полученное уравнение:

$$\boxed{M_A = 3M - M_B.} \Rightarrow 8(3M - M_B) - 3M - 2M_B = 0. \Rightarrow \boxed{M_B = 2.1M.}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_A = 0.9M.}$$

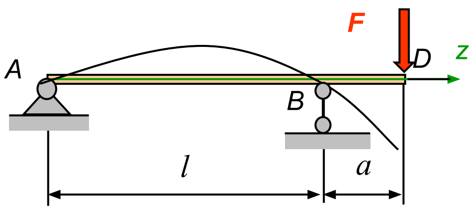
## 6.2.3 Расчет статически неопределимых балок

Напомним, что статически неопределимыми системами называются такие системы, в которых **число неизвестных усилий** (опорных реакций) **превышает число независимых уравнений равновесия**, которые можно составить для рассматриваемой системы. Это означает, что статически неопределимая система имеет *дополнительные связи*, которые с точки зрения обеспечения неизменяемости системы, рассматриваемой как совокупность абсолютно твердых (недеформируемых) тел, являются *лишними*.

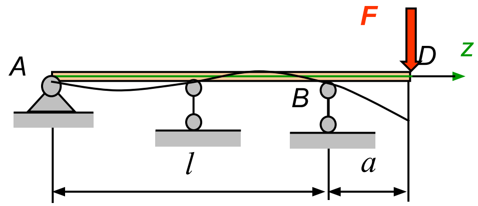
Количество таких “лишних” связей (разность числа искомых неизвестных усилий и числа независимых уравнений равновесия) характеризует *степень статической неопределимости* системы. Степень статической неопределимости плоской системы может быть установлена как разница между числом всех неизвестных реактивных силовых факторов *N* (реактивные силы + реактивные моменты) и числом возможных для системы уравнений равновесия *n*: $\boldsymbol{S = N - n}$.

.

**Примеры:**




Статически определимая балка
($N$ = 2, n = 2, S = 0)




Статически неопределимая балка
(N = 3, n = 2, S = 1
прогибы значительно
меньше)

**Статически неопределимые системы обладают повышенной жесткостью и несущей способностью. Поэтому они широко используются в строительной практике**.

Для расчета статически неопределимых балок необходимо записать уравнения равновесия *(статическая сторона задачи)* и уравнения, выражающие равенство 0 вертикального перемещения на одной или нескольких опорах в зависимости от степени статической неопределимости и условий закрепления балки *(геометрическая сторона задачи).* Уравнения для перемещений на опорах могут быть записаны с использованием **метода начальных параметров** *(физическая сторона задачи).* Из полученной системы находятся неизвестные опорные реакции, затем строятся эпюры внутренних силовых факторов, выполняется расчет на прочность, на жесткость и т. п.