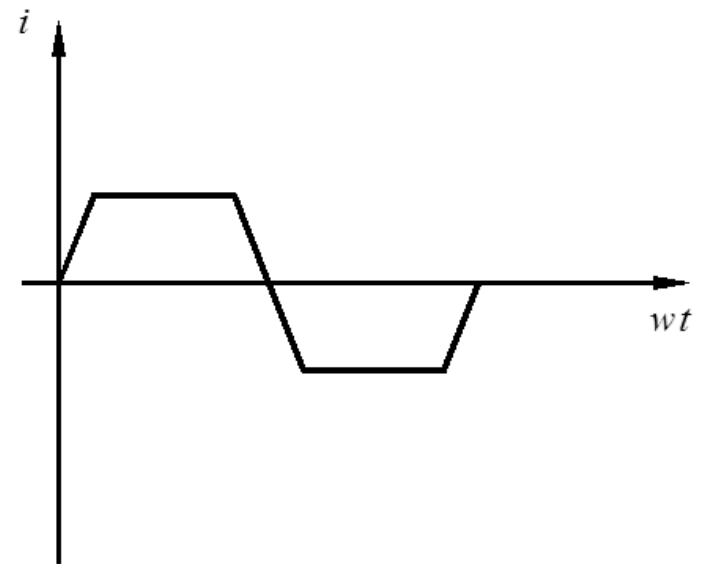
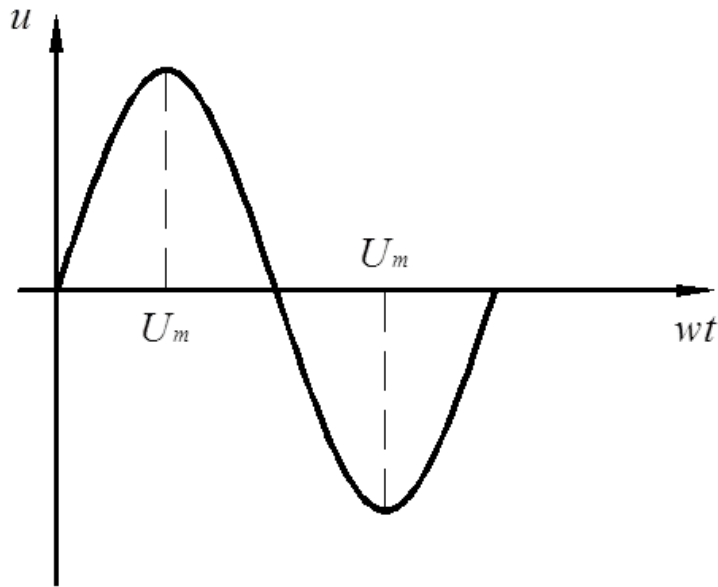


# ЛЕКЦИЯ 3

---

# Электрические цепи однофазного переменного тока

**Переменным** называется электрический ток, величина и направление которого изменяются во времени. Форма кривой переменного тока разнообразна.



Значение переменного тока в рассматриваемый момент времени называют **мгновенным значением** и обозначают строчной буквой *i*.

Мгновенный ток называется **периодическим**, если значения его повторяются через одинаковые промежутки времени:

$$i(t) = i(t + T)$$

Наименьший промежуток времени, через который значения переменного тока повторяются, называется **периодом**.

Период *T* измеряется в секундах [с].

Периодические токи, изменяющиеся по синусоидальному закону, называются **синусоидальными**.

Мгновенное значение синусоидального тока определяется по формуле:

$$i(t) = I_m \cdot \text{Sin}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i\right) = I_m \cdot \text{Sin}(2\pi f \cdot t + \varphi_i) = I_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi_i)$$

где  **$I_m$**  - максимальное, или **амплитудное**, значение тока.

*Амплитудное значение синусоидального тока или напряжения можно измерить с помощью осциллографа.*

Аргумент синусоидальной функции  $\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi_i$

- называют фазой.

Величину  $\varphi$ , равную фазе в момент времени  $t = 0$ , называют **начальной фазой**.

Фаза измеряется в радианах [рад] или градусах.

Величину, обратную периоду, называют **частотой**.

$$f = \frac{1}{T}$$

*Частота – ток и напряжение меняют свое направление (в секунду)*

Частота  $f$  измеряется в герцах [Гц].

Величину  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$  называют **круговой**

(или **угловой**) **частотой**.

Угловая частота измеряется в [рад/с].

Если у синусоидальных токов начальные фазы при **одинаковых частотах одинаковы**, говорят, что эти токи совпадают по фазе.

Если неодинаковы по фазе, говорят, что токи сдвинуты по фазе.

Сдвиг фаз двух синусоидальных токов измеряется разностью начальных фаз:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

*Амперметры и вольтметры электромагнитной системы измеряют **действующие значения** переменного тока и напряжения.*

**Действующим значением** переменного тока называется среднеквадратичное значение тока за период.

Действующее значение тока для синусоиды  $i = I_m \cdot \sin \omega t$  можно определить, как:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \frac{(1 - \cos 2\omega t)}{2} \cdot dt} = \\ &= \frac{I_m}{\sqrt{2}} \sqrt{\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Аналогично определяются действующие значения ЭДС и напряжений...

Действующие значения переменного тока, напряжения, ЭДС меньше максимальных в  $\sqrt{2}$ .

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$$

Законы Ома и Кирхгофа справедливы для мгновенных значений токов и напряжений.

Закон Ома для мгновенных значений:

$$i = \frac{u}{R} \cdot$$

Законы Кирхгофа для мгновенных значений:

$$\sum i = 0 \quad ,$$

$$\sum e = \sum u \cdot$$



# Изображения синусоидальных функций времени в векторной форме

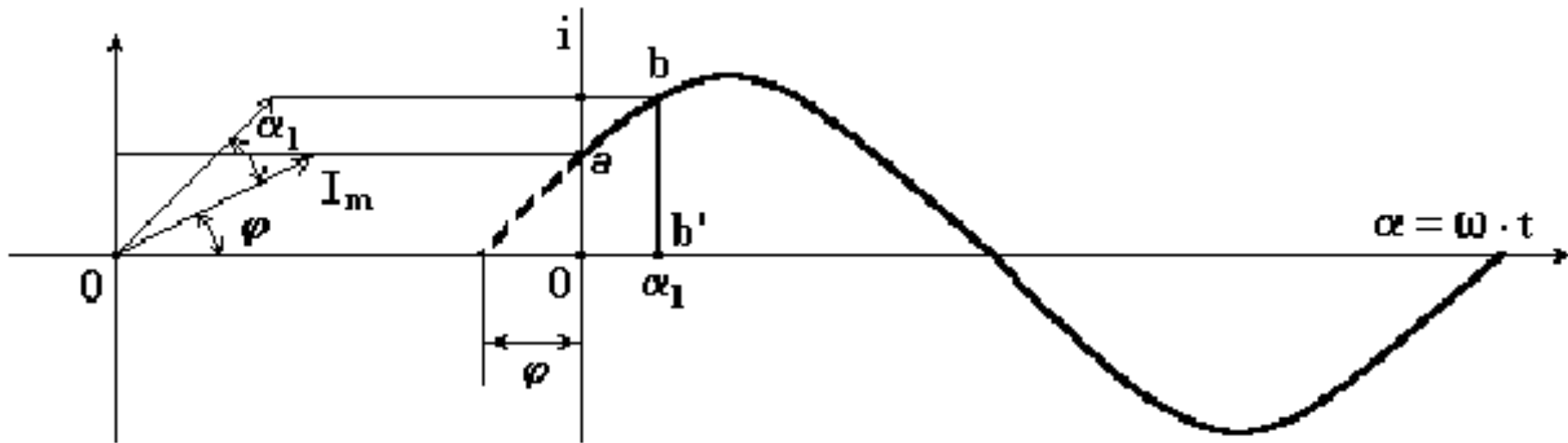
При расчете электрических цепей часто приходится складывать или вычитать величины токов или напряжений, являющиеся синусоидальными функциями времени.

Графические построения или тригонометрические преобразования в этом случае могут оказаться слишком громоздкими.

Задача упрощается, если представить наши синусоидальные функции в векторной форме.

Имеем синусоидальную функцию

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

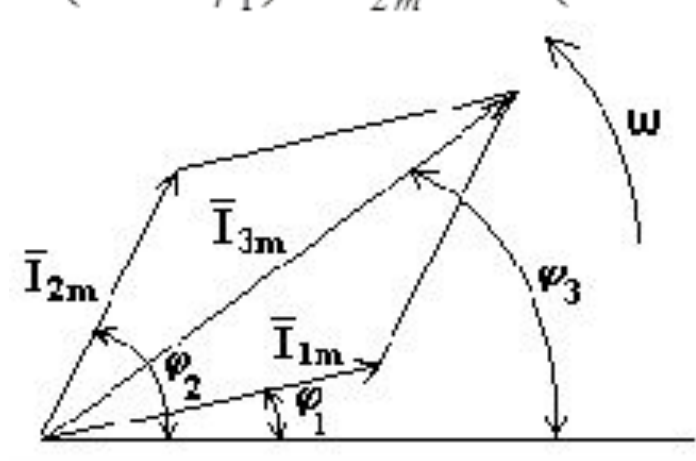


Пусть даны два синусоидальных тока:

$$i_1 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1), \quad i_2 = I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

Нужно сложить эти токи и получить результирующий ток:

$$i_3 = i_1 + i_2 = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + I_{2m} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = I_{m3} \cdot \sin(\omega t + \varphi_3)$$



**Векторная диаграмма** - это совокупность векторов, изображающих синусоидальные напряжения, токи и ЭДС одинаковой частоты.

Необходимо отметить, что напряжение, ток и ЭДС - это скалярные, а не векторные величины.

Мы представляем их на векторной диаграмме в виде не пространственных, а временных радиус - векторов, вращающихся с одинаковой угловой скоростью.

Изображать на векторной диаграмме два вектора, вращающихся с различной угловой скоростью, бессмысленно.

***Положительным считается направление вращения векторов против часовой стрелки.***

Векторные диаграммы используются для качественного анализа электрических цепей, а также при решении некоторых электротехнических задач.

# Изображение синусоидальных функций времени в комплексной форме

При расчетах цепей синусоидального тока используют символический метод расчета или метод комплексных амплитуд.

В этом методе сложение двух синусоидальных токов заменяют сложением двух комплексных чисел, соответствующих этим токам.

Из курса математики известно, что комплексное число может быть записано в показательной или алгебраической форме:

$$C = c \cdot e^{j\varphi} = a + jb$$

где  $c$  - модуль комплексного числа;  $\varphi$  - аргумент;

$a$  - вещественная часть комплексного числа;

$b$  - мнимая часть;

$j$  - мнимая единица,  $j = \sqrt{-1}$ .

С помощью формулы Эйлера можно перейти от показательной формы записи к алгебраической:

$$c \cdot e^{j\varphi} = c \cdot \text{Cos} \varphi + j \cdot c \cdot \text{Sin} \varphi = a + jb$$

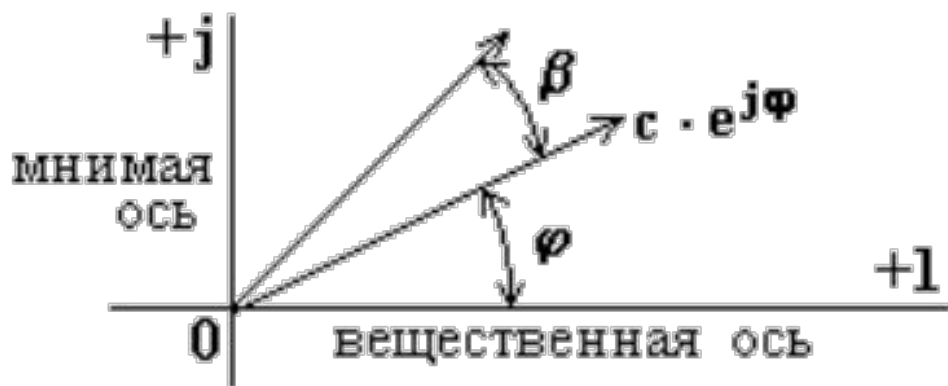
$$a = c \cdot \text{Cos} \varphi, \quad b = c \cdot \text{Sin} \varphi$$

От алгебраической формы записи переходят к показательной форме с помощью формул:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \varphi = \text{arcTg} \frac{b}{a}$$

**Комплексное число** может быть представлено в виде **радиус - вектора** в комплексной плоскости.

Вектор длиной, равной модулю  $C$ , расположен в начальный момент времени под углом  $\varphi$  относительно вещественной оси





• Умножим комплексное число на множитель  $e^{j\beta}$ .

Радиус - вектор на комплексной плоскости повернется на угол  $\beta$ .

**Множитель  $e^{j\beta}$  называется поворотным.**

$$c \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\beta} = c \cdot e^{j(\varphi+\beta)}$$

Если  $\beta = \omega t$ , то вектор, умноженный на  $e^{j\omega t}$ , превратится во вращающийся со скоростью  $\omega$  радиус - вектор.

**Выражение  $c \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = c \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$  называется комплексной функцией времени.**

Применительно к току, получим:

$I_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}$  - комплексную функцию времени для тока.

$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi}$  - комплексная амплитуда тока (исходное положение вектора в комплексной плоскости).

Зная  $\dot{I}_m$ , можем найти комплекс действующего значения:

$$\dot{I} = \frac{\dot{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\varphi} = I \cdot e^{j\varphi} \quad (1)$$

Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения:

$$\begin{aligned} \text{Im}[\dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}] &= \text{Im}[\dot{I}_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \\ &= \text{Im}[\dot{I}_m \cdot \text{Cos}(\omega t + \varphi) + j\dot{I}_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi)] = I_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi) = i \end{aligned} \quad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) следует:

**Правило перехода от тригонометрической формы записи к показательной:**

*Нужно амплитудное значение поделить на  $\sqrt{2}$  и умножить на  $e^{j\varphi}$ .*

**Правило перехода от показательной формы к тригонометрической:**

*Нужно комплекс действующего значения увеличить на  $\sqrt{2}$  и от полученного значения взять мнимую часть.*

Применительно к напряжению, получим:

$U_m \cdot e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}$  - комплексную функцию времени для напряжения.

$\dot{U}_m = U_m \cdot e^{j\varphi}$  - комплексная амплитуда напряжения (исходное положение вектора в комплексной плоскости).

Определим, чему равна мнимая часть комплексной функции времени для напряжения:

$$\begin{aligned} \text{Im}[\dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}] &= \text{Im}[\dot{U}_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}] = \\ &= \text{Im}[U_m \cdot \text{Cos}(\omega t + \varphi) + jU_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi)] = U_m \cdot \text{Sin}(\omega t + \varphi) = u \end{aligned}$$

*Мгновенное синусоидальное напряжение (ток, ЭДС) является мнимой частью соответствующей комплексной функции времени.*

**Замечание.** В электротехнике над символами, изображающими комплексные напряжения, токи, ЭДС, принято ставить точку.

Синусоидальные функции времени могут быть представлены векторами в комплексной плоскости, вращающимися против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\omega$ .

Проекция вектора на мнимую ось изменяется по синусоидальному закону.

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}}{R} \quad \text{- закон Ома;}$$

$$\sum \dot{I}_m = 0 \quad \text{- первый закон Кирхгофа;}$$

$$\sum \dot{E}_m = \sum \dot{U}_m \quad \text{- второй закон Кирхгофа.}$$

***Спасибо  
за внимание!***