Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = в_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = в_m \end{cases}$$

a_{ij} – коэффициенты, x_j - неизвестные, b_i - свободные члены уравнений.

Опр. Решить систему означает найти все совокупности значений неизвестных $\boldsymbol{(x_1, x_2,....x_n)}$, удовлетворяющих системе или показать, что система не имеет решений.

1.Если система не имеет решений, то она называется ***несовместимой.***
2. Если она имеет единственное решение – ***определенной.***
3. Если она имеет бесконечно много решений – ***неопределенной***.

Опр: Если хотя бы одно из чисел b_i, отлично от нуля, система называется **неоднородной.** Если все свободные члены равны нулю, то система называется ***однородной.***

Опр: Матрица составленная из коэффициентов системы называется **основной матрицей**, если к основной матрице приписать справа столбец свободных членов, то получится **расширенная матрица системы.**

Метод Крамера

По формулам Крамера решаются только неоднородные системы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = в_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = в_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = в_3 \end{cases}$$

Опр: Определитель Δ основной матрицы называется главным (основным) определителем.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Опр: ***Дополнительным определителем*** называется определитель полученный из главного определителя путем замены j-го столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} в_1 & a_{12} & a_{13} \\ в_2 & a_{22} & a_{23} \\ в_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & в_1 & a_{13} \\ a_{21} & в_2 & a_{23} \\ a_{31} & в_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & в_1 \\ a_{21} & a_{22} & в_2 \\ a_{31} & a_{32} & в_3 \end{vmatrix}$$

Теорема: Если определитель системы Δ не равен 0, то система имеет **единственное решение**, которое находится по формулам:

$X_1 = \Delta_1 / \Delta;$

$x_2 == \Delta_2 / \Delta;$

$x_3 == \Delta_3 / \Delta$

Теорема: Если определитель системы $\Delta=0$, и хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля, то система **несовместна(т.е. не имеет решений).**

Теорема: Если определитель системы $\Delta=0$, и $\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0$, то система **имеет бесконечное множество решений. (неопределенная система).**

Матричный метод решения СЛАУ

Системе 3х линейных уравнений соответствует матричное уравнение

$$\mathbf{AX=B}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} в_1 \\ в_2 \\ в_3 \end{pmatrix}$$

$$AX=B$$

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$EX=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Метод не работает, если число уравнений не равно числу неизвестных, или когда матрица системы хотя и квадратна, но вырождена (тогда не существует обратной матрицы, т.е определитель основной матрицы равен нулю).