# Тепломассообмен 11

- Теория подобия физических явлений
- Числа (критерии) подобия
- Уравнения подобия

# Условия подобия процессов конвективного теплообмена

Если систему дифференциальных уравнений и граничные условия привести к безразмерному виду, то число влияющих факторов формально сократится, например число (критерий) Рейнольдса: $\mathrm{Re} = \dfrac{w_0 \ell_0}{\nu} \rightarrow$ соотношение сил инерции и вязкости.

Для нахождения явного вида зависимостей (9) нужны опытные данные. Чтобы результаты опытов на модели можно было перенести на натуру, необходимо, по условию подобия процессов на модели и натуре, выдержать равенство чисел подобия:

$$\boxed{\mathrm{Re}_{м.} = \frac{w_м \ell_м}{\nu_м} = \frac{w_н \ell_н}{\nu_н} = \mathrm{Re}_н}$$

# Условия подобия физических явлений

Если модель изготовлена в масштабе $\ell_м/\ell_н$ 1/10, то для одной и той же жидкости на модели и натуре, для соблюдения условий подобия необходимо, чтобы отношение скоростей было $w_м/w_н$ = 10, что не всегда можно обеспечить.

Поэтому иногда моделируют процессы на других жидкостях $\nu_м/\nu_н$ = 1/10. В теорию подобия внесли большой вклад Гухман А.А., Кирпичев М.В., Петухов В.С., Михеев М.А. и др.

Приведем систему дифференциальных уравнений и условия однозначности к безразмерному виду одним из способов - методом масштабных преобразований.

Получатся безразмерные величины:

$$X=\frac{x}{\ell_0};Y=\frac{y}{\ell_0};Z=\frac{z}{\ell_0};W_x=\frac{w_x}{w_0};W_y=\frac{w_y}{w_0};W_z=\frac{w_z}{w_0};\Theta=\frac{\theta}{\theta_c}.$$

# Безразмерное дифференциальное уравнение теплоотдачи

Выразим размерные величины через безразмерные и масштабы отнесения, выбранные из условий однозначности,

$$x = X\ell_0; y = Y\ell_0; z = Z\ell_0; w_x = W_x w_0; w_y = W_y w_0; w_z = W_z w_0;$$

$\theta = \Theta\theta_c$ подставим их в дифференциальные уравнения и граничные условия. Тогда дифференциальное уравнение теплоотдачи примет вид:

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\theta_c}\frac{\partial(\Theta\theta_c)}{\partial(Y\ell_0)} = -\frac{\lambda}{\theta_c}\frac{\theta_c}{\ell_0}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right).$$

После сокращения на $\theta_c$ и переноса всех размерных величин в левую сторону получим: $\boxed{\frac{\alpha\ell_0}{\lambda} = (-1)\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right),}$

где $\alpha\ell_0/\lambda = Nu$ – число Нуссельта (соотношение конвективной теплоотдачи вне пограничного слоя и теплопроводности внутри.

# Приведение к безразмерному виду дифференциального уравнения энергии

Дифференциальное уравнение энергии для стационарного режима $(\frac{\partial t}{\partial \tau}=0; \frac{\partial \theta}{\partial \tau}=0)$ имеет вид:

$$w_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \theta}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right). \quad (2)$$

Выразим все размерные величины через безразмерные и масштабы отнесения:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 (\Theta \theta_c)}{\partial (X \ell_0)^2} = \frac{\partial}{\partial (X \ell_0)}\left[\frac{\partial (\Theta \theta_c)}{\partial (X \ell_0)}\right] = \frac{\theta_c}{\ell_0^2}\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2}\right),$$

Тогда дифференциальное уравнение энергии:

$$W_x w_0 \frac{\partial (\Theta \theta_c)}{\partial (X \ell_0)} + W_y w_o \frac{\partial (\Theta \theta_c)}{\partial (Y \ell_0)} + W_z w_0 \frac{\partial (\Theta \theta_c)}{\partial (Z \ell_0)} = a \frac{\theta_c}{\ell_0^2} \nabla^2 \Theta. \quad (3)$$

# Безразмерное дифференциальное уравнение энергии

Умножим обе части уравнения (3) на $\ell_0^2 / a$:

$$w_0 \frac{\theta_c}{\ell_0} \frac{\ell_0^2}{a} [W_x (\frac{\partial \Theta}{\partial X}) + W_y (\frac{\partial \Theta}{\partial Y}) + W_z (\frac{\partial \Theta}{\partial Z})] = a \frac{\theta_c}{\ell_0^2} \frac{\ell_0^2}{a} \nabla^2 \Theta.$$

После сокращений получим безразмерное дифференциальное уравнение энергии Фурье-Кирхгофа (теплопроводности в жидкости):

$$\boxed{\frac{w_0 \ell_0}{a} [W_x (\frac{\partial \Theta}{\partial X}) + W_y (\frac{\partial \Theta}{\partial Y}) + W_z (\frac{\partial \Theta}{\partial Z})] = \nabla^2 \Theta} \quad . \quad (4)$$

Здесь $\frac{w_0 \ell_0}{a} = Pe \rightarrow$ число (критерий) Пекле.

# Приведение к безразмерному виду уравнения движения

Дифференциальное уравнение движения Навье-Стокса

в проекции на ось x для стационарного режима:

$$W_x w_0 \frac{\partial(W_x w_0)}{\partial(X \ell_0)} + W_y w_0 \frac{\partial(W_x w_0)}{\partial(Y \ell_0)} + W_z w_0 \frac{\partial(W_x w_0)}{\partial(Z \ell_0)} = \qquad (5)$$

$$= g\beta\Theta\theta_c - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial(X \ell_0)} + \nu \frac{w_0}{\ell_0^2}\nabla^2 W_x.$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{\ell_0^2}{\nu w_0}$ вынесем из него только размерные величины:

$$\frac{w_0^2}{\ell_0}\frac{\ell_0^2}{\nu w_0} = g\beta\theta_c \frac{\ell_0^2}{\nu w_0} - \frac{1}{\rho \ell_0}\frac{\ell_0^2}{\nu w_0} + \frac{\nu w_0}{\ell_0^2}\frac{\ell_0^2}{\nu w_0}.$$

# Числа подобия Рейнольдса, Грасгофа, Эйлера

После сокращений имеем: $\boxed{\dfrac{w_0\ell_0}{\nu} = g\beta\theta_c \dfrac{\ell_0^2}{\nu w_0} - \dfrac{\ell_0}{\rho\nu w_0} + 1.}$ (6)

В левой части $w_0\ell_0/\nu = \mathrm{Re}$ – число (критерий) Рейнольдса (соотношение сил инерции и вязкости). Умножим первый член правой части уравнения (6) на:

$$\frac{\nu\ell_0}{\nu\ell_0} \to g\beta\theta_c \frac{\ell_0^2}{\nu w_0}\frac{\nu\ell_0}{\nu\ell_0} = g\beta\theta_c \frac{\ell_0^3}{\nu^2}\frac{\nu}{w_0\ell_0} = \frac{Gr}{\mathrm{Re}},$$

где $\boxed{g\beta\theta_c \dfrac{\ell_0^3}{\nu^2} = Gr \to}$ число (критерий) Грасгофа – соотношение подъемных и вязкостных сил.

Второй член правой части равенства (6) умножим на:

$$\frac{w_0}{w_0} \to \frac{\ell_0}{\rho\nu w_0}\frac{\partial p}{\partial X}\frac{w_0}{w_0} = \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{p}{\rho w_0^2}\frac{w_0\ell_0}{\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial X}(Eu\,\mathrm{Re}),$$

где $\boxed{\dfrac{p}{\rho w_0^2} = Eu \to}$ число (критерий) Эйлера – соотношение сил давления и инерции.

# Безразмерное дифференциальное уравнение сплошности (неразрывности)

Тогда безразмерное дифференциальное уравнение движения Навье-Стокса в проекции на ось *x* для стационарного режима:

$$\mathrm{Re}(W_x \frac{\partial W_x}{\partial X} + W_y \frac{\partial W_x}{\partial Y} + W_z \frac{\partial W_x}{\partial Z}) = \frac{Gr}{\mathrm{Re}}\Theta - \frac{\partial}{\partial X}(Eu\,\mathrm{Re}) + \nabla^2 W_x. \quad (7)$$

Проекции уравнения Навье-Стокса на оси *y* и *z* не дадут новых чисел подобия, поэтому их не рассматриваем.

Дифференциальное уравнение сплошности (неразрывности)

$$\boxed{\frac{\partial(W_x w_0)}{\partial(X\ell_0)} + \frac{\partial(W_y w_0)}{\partial(Y\ell_0)} + \frac{\partial(W_z w_0)}{\partial(Z\ell_0)} = 0;}$$

или

$$\boxed{\frac{w_0}{\ell_0}(\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z}) = 0.}$$

Так как $(w_0/\ell_0) \neq 0$ то безразмерное дифференциальное уравнение сплошности:

$$\boxed{\frac{\partial W_x}{\partial X} + \frac{\partial W_y}{\partial Y} + \frac{\partial W_z}{\partial Z} = 0 \rightarrow}$$

или

$$\boxed{div\vec{W} = 0.} \quad (8)$$

# Безразмерные система уравнений и граничные условия

Безразмерная система дифференциальных уравнений конвективного теплообмена:

$$Nu=-(\partial\Theta/\partial Y);Pe(W_x\frac{\partial\Theta}{\partial X}+W_y\frac{\partial\Theta}{\partial Y}+W_z\frac{\partial\Theta}{\partial Z})=\nabla^2\Theta;$$

$$\mathrm{Re}(W_x\frac{\partial W_x}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_x}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_x}{\partial Z})=\frac{Gr}{\mathrm{Re}}\Theta-\frac{\partial}{\partial X}(Eu\,\mathrm{Re})+\nabla^2W_x;$$

$$\mathrm{Re}(W_x\frac{\partial W_y}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_y}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_y}{\partial Z})=-\frac{\partial}{\partial Y}(Eu\,\mathrm{Re})+\nabla^2W_y;$$

$$\mathrm{Re}(W_x\frac{\partial W_z}{\partial X}+W_y\frac{\partial W_z}{\partial Y}+W_z\frac{\partial W_z}{\partial Z})=-\frac{\partial}{\partial Z}(Eu\,\mathrm{Re})+\nabla^2W_z;div\vec{W}=0. \tag{9}$$

Граничные условия I рода:

$$X<0\rightarrow W_x=1;W_y=W_z=0;\Theta=\Theta_0=0;$$

$$0\le X\le 1;Y=0\rightarrow W_x=W_y=W_z=0;\Theta=\Theta_c=1. \tag{10}$$

# Определяемые и определяющие числа подобия

Преобразуем число Пекле следующим образом:

$$Pe=\frac{w_0\ell_0}{a}\frac{\nu}{\nu}=\frac{w_0\ell_0}{\nu}\frac{\nu}{a}=\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr},$$

где $\boxed{\frac{\nu}{a}=\mathrm{Pr}\rightarrow}$ число (критерий) Прандтля – соотношение полей скоростей и температур.

Из безразмерной системы уравнений и граничных условий можно выявить три вида величин:

- независимые переменные - $X, Y, Z;$
- постоянные величины - $\mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr};$
- зависимые переменные - $Nu, \Theta, W_x, W_y, W_z, Eu.$

Определяемые числа подобия $\boxed{Nu, \Theta, W_x, W_y, W_z, Eu;}$

Определяющие числа подобия $\boxed{X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr}.}$

# Общий вид решений конвективной теплоотдачи в безразмерном виде

Каждый определяемый критерий подобия является функцией

определяющих:

$$\boxed{Nu = f_1(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr});}$$

$$\Theta = f_2(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr});$$

$$W_x = f_3(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr});$$

$$W_y = f_4(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr}); \qquad (11)$$

$$W_z = f_5(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr});$$

$$Eu = f_6(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr}).$$

В безразмерных зависимостях (11) шесть влияющих факторов, по сравнению с двенадцатью - в размерных уравнениях (9) для $\alpha, \theta, w_x, w_y, w_z, p,$ (см. Тепломассообмен 10).

# Виды подобий

Подобными называются явления, которые имеют одинаковую физическую природу и описываются одинаковыми по форме и по содержанию уравнениями.

Бывают следующие виды подобия:

- геометрическое – подобие геометрических фигур;
- тепловое – подобие тепловых потоков и температурных полей;
- кинематическое – подобие движений жидкостей;
- динамическое – подобие сил, вызывающих подобные движения.

Основные понятия о теории подобия можно получить из трех теорем подобия.

I теорема – в подобных явлениях одноименные числа подобия равны:

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{w_1 \ell_1}{\nu_1} = \frac{w_2 \ell_2}{\nu_2} = \mathrm{Re}_2 .$$

# II и III теоремы подобия физических явлений

II теорема – решение дифференциального уравнения (системы уравнений) можно представить в виде функции от чисел подобия, полученных из этого уравнения:

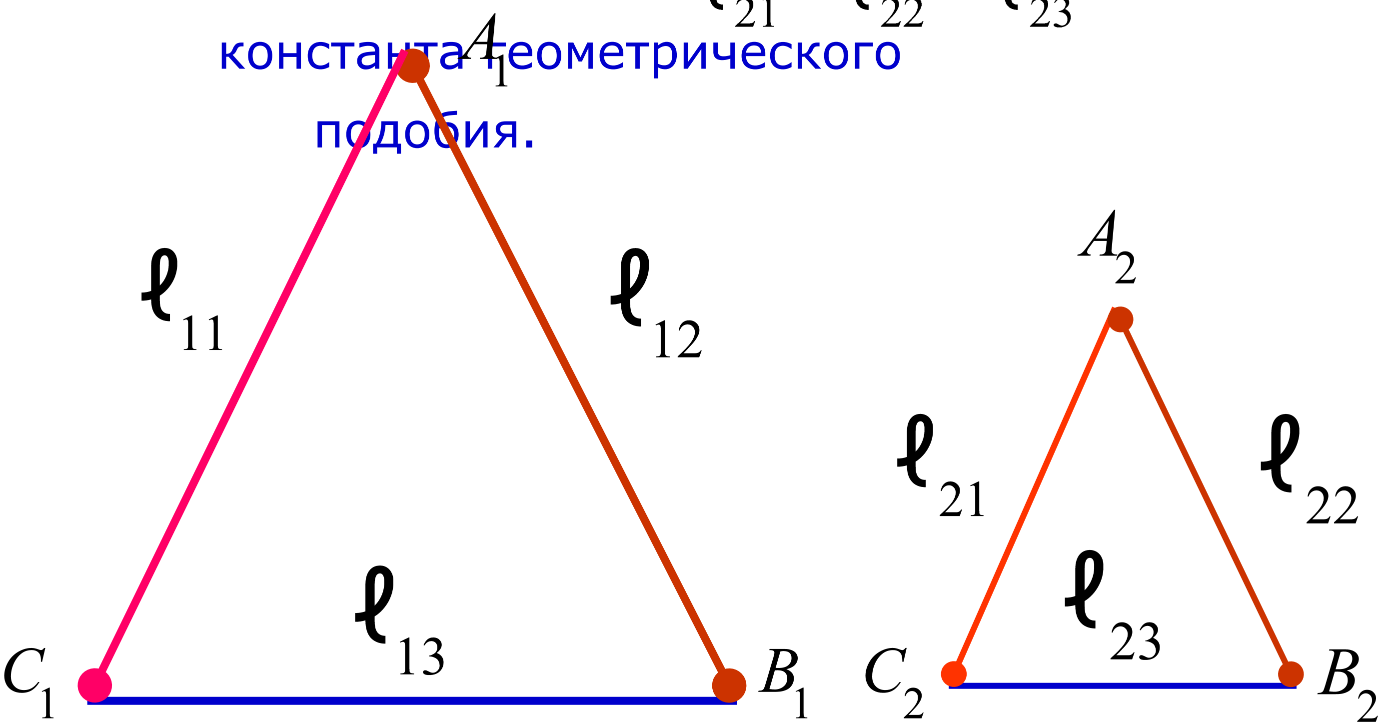
$$\boxed{Nu = f(X, Y, Z, \mathrm{Re}, Gr, \mathrm{Pr}).}$$

IIIтеорема – подобны те явления, условия однозначности которых подобны, а числа подобия, составленные из этих условий однозначности, равны.

Условия однозначности подобны, если в сходственных точках в сходственные моменты времени отношение одноименных величин есть величины постоянные, называемые константами подобия. Одноименные величины – это величины, имеющие одинаковый физический смысл и размерности.

# Геометрическое подобие

Для геометрического подобия необходимо равенство отношений сходственных сторон: $\frac{\ell_{11}}{\ell_{21}} = \frac{\ell_{12}}{\ell_{22}} = \frac{\ell_{13}}{\ell_{23}} = c_\ell$ - константа геометрического подобия.



# Константы подобия

$\boxed{\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = c_\theta \rightarrow}$ константа теплового подобия;

$\boxed{\dfrac{w_1}{w_2} = c_w \rightarrow}$ константа кинематического подобия.

Сходственные точки – это точки, отвечающие геометрическому подобию $A_1$-$A_2$; $B_1$-$B_2$; $C_1$-$C_2$.

Сходственные моменты времени – имеющие одинаковое начало отсчета, для которых $(\tau_1/\tau_2) = c_\tau \rightarrow$ безразмерное время.

Константы подобия нельзя выбирать произвольно, они связаны между собой:

$$w_1 = c_w w_2; \ell_1 = c_\ell \ell_2; \nu_1 = c_\nu \nu_2;$$

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{w_1 \ell_1}{\nu_1} = \frac{w_2 \ell_2}{\nu_2} = \mathrm{Re}_2, \qquad \mathrm{Re}_1 = \frac{c_w c_\ell}{c_\nu} \frac{w_2 \ell_2}{\nu_2} = \frac{c_w c_\ell}{c_\nu} \mathrm{Re}_2;$$

Так как $\mathrm{Re}_1 = \mathrm{Re}_2$, то константы подобия связаны соотношением: $\boxed{\dfrac{c_w c_\ell}{c_\nu} = 1.}$