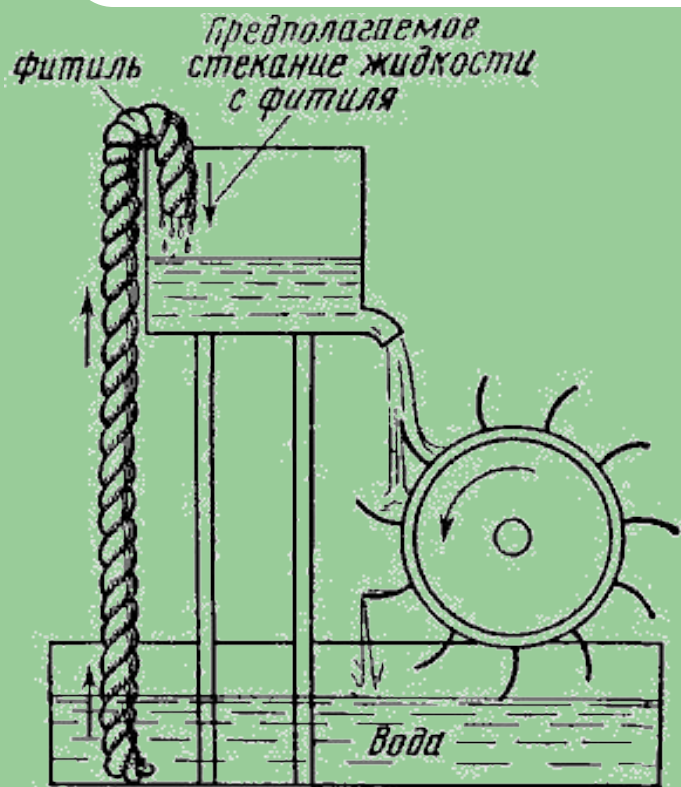


Лекция № 5

Импульс. Работа и энергия



Алексей Викторович
Гуденко

01/03/2018

План лекции

- Работа силы. Мощность
- Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Теорема Кёнига
- Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия
- Закон сохранения энергии в механике. Общефизический закон сохранения энергии

Демонстрации

- **Воздушная дорога.** Упругие и неупругие столкновения тележек
- **Упругие столкновения бильiardных шаров.**
- **Потенциальная яма.**
- **Мёртвая петля.**
- **Превращения энергии при падении тела.**

Механическая работа и мощность

Механическая работа – пространственная характеристика действия силы.

- Работа силы над телом равна скалярному произведению силы F на перемещение тела dr :

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = Fdr \cos\theta$$

- Мощность – работа силы в единицу времени:

$$N = dA/dt = \mathbf{F}\mathbf{v} = Fv \cos\theta$$

- Единицы работы и мощности:

СИ:

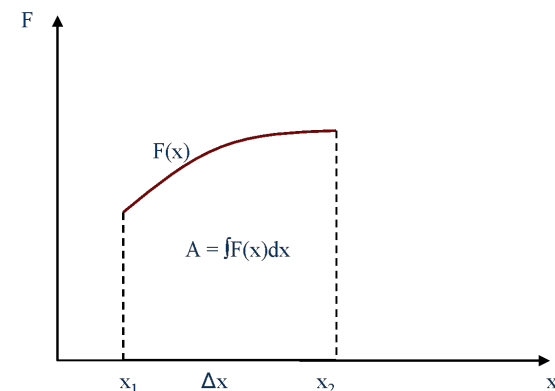
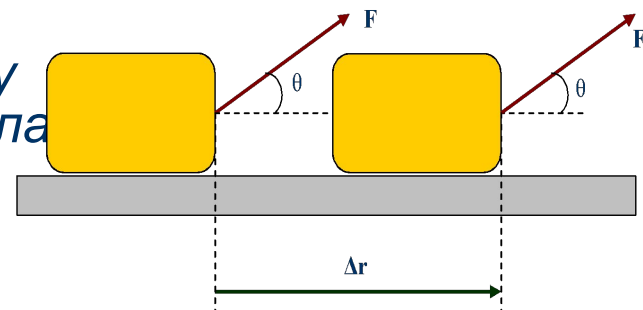
$$[A] = 1\text{Н} \cdot 1\text{ м} = 1\text{ Дж (Джоуль)}$$

$$[N] = \text{Дж/с} = 1\text{ Вт (Ватт)}$$

СГС:

$$[A] = 1\text{ дн} \cdot 1\text{ см} = 1\text{ эрг} = 10^{-7}\text{ Джоуль}$$

$$[N] = \text{эрг/с}$$



Что такое 1 эрг и может ли человек развить мощность в 1 л.с.?

- **1 эрг** = 1 дин см – такую работу совершает комар против силы тяжести, чтобы перелететь с большого пальца руки на указательный ($h \sim 1$ см)
- **1 Дж** = 1 Н м – работа по подъёму массы ~ 100 г на высоту 1 м
- **лошадиная сила = 1 л.с. = 736 Вт**
Мощность в ~ 1 л.с. человек развивает, поднимаясь по эскалатору метро со скоростью ~ 2 м/с



Кинетическая энергия $K = \frac{1}{2} mv^2$.

Работа и кинетическая энергия.

Теорема об изменении кинетической энергии

- Работа всех сил, действующих на частицу, равна изменению её кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} mv^2:$$

$$dA = \mathbf{F}d\mathbf{r} = m\mathbf{a}d\mathbf{r} = m\mathbf{a}v d\mathbf{t} = m\mathbf{v}d\mathbf{v} = d(mv^2/2) = dK \Rightarrow$$

$$A = K_2 - K_1$$

Теорема Кёнига

- Кинетическая энергия системы частиц складывается из кинетической энергии движения как целого со скоростью центра масс $\frac{1}{2} MV_C^2$ и кинетической энергии частиц в системе центра масс K' (С-системе):

$$K = K' + \frac{1}{2} MV_C^2$$

- Доказательство:

Кинетическая энергия системы частиц:

$$\begin{aligned} K &= \sum m_i v_i^2 / 2 = \sum m_i (\mathbf{v}_i' + \mathbf{V}_C)^2 / 2 = \\ &= \sum m_i v_i'^2 / 2 + V_C \sum m_i \mathbf{v}_i' + MV_C^2 / 2 = \\ &= \sum m_i v_i'^2 / 2 + MV_C^2 / 2 = K' + MV_C^2 / 2 \\ & (M = \sum m_i - \text{масса системы}) \end{aligned}$$

Энергия обруча

- Обруч катится без проскальзывания со скоростью v_0 . Найти его кинетическую энергию.

- По теореме Кёнига:

$$K = K' + \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_{\text{окр}}^2 + \frac{1}{2} m v_0^2 = \{v_{\text{окр}} = v_0\} = m v^2$$

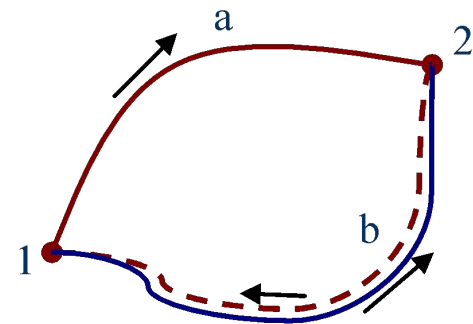
Ответ: $K = m v^2$

Консервативные и неконсервативные силы. Потенциальная энергия

- Если на частицу в каждой точке пространства действует определённая сила, то всю совокупность сил называют **силовым полем** $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$
- Поле тяжести Земли - однородное стационарном поле:
 $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$; $\mathbf{g} = \mathbf{g}(0, 0, -g)$
- Работа силы тяжести:
 $A = \int m\mathbf{g}d\mathbf{r} = - \int mgdz = mg(z_1 - z_2) = mg(h_1 - h_2)$ – работа не зависит от траектории!
- Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела, называются **консервативными**, а соответствующие силовые поля – **потенциальными**.
- Поле тяжести Земли – **потенциальное поле**.

Другое определение консервативных сил

- Работа консервативных сил при перемещении тела по замкнутой траектории равна нулю



$$A_{1a2} = A_{1b2} \Rightarrow$$
$$A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$$

Потенциальная энергия. Потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли

- Потенциальная энергия – это способность тела или системы тел совершать работу.
- Количественно потенциальная энергия в точке P равна величине работы поля по перемещению тела из т. P в некоторую точку O , принимаемую за начало отсчёта.
- Потенциальная энергия в поле тяжести Земли $U(x,y,z) = mgz$ (z – вертикальная координата)
- Величина работы поля над телом равна убыли потенциальной энергии $dA = -dU \Leftrightarrow$
 $\mathbf{F} = (-\partial U/\partial x; -\partial U/\partial y; -\partial U/\partial z) = -\text{grad}U \Leftrightarrow$ Сила всегда направлена против градиента потенциальной энергии

Поле центральных сил

- Сила называется центральной, если она направлена к одной и той же точке и зависит только от расстояния до этой точки (силовой центр) :

$$\mathbf{F} = F(r)\mathbf{r}/r$$

- Любое поле центральных сил **потенциально**:

$$A = \int \mathbf{F}(r) \mathbf{r} ds / r = \int F(r) dr - \text{не зависит от пути} \\ (\mathbf{r} ds = r ds_r = r dr)$$

Потенциальная энергия в поле тяготения $U(r) = -GMm/r$

- $F = -GMm/r^2$ Потенциальная энергия ($U(\infty) = 0$):

$$U(r) = -\int_r^\infty GMm dr/r^2 = -\int_r^\infty GMm dr/r^2 = -GMm/r$$

- Если $h \ll R$

$$U(r) = -GMm/r = -g_0 m R^2/r = -g_0 m R^2/(R + h) = -mg_0 R(1 - h/R) = -mg_0 R + mg_0 h = mg_0 h + C$$

совпадает с потенциальной энергией в поле тяжести Земли вблизи её поверхности (с точностью до $C = -mg_0 R$)

Потенциальная энергия упругой деформации пружины

- Потенциальная энергия деформированного тела равна работе, которую совершает сила упругости при переходе из данного состояния в недеформированное: $U = \frac{1}{2} kx^2$

Закон сохранения механической энергии

- Сумма кинетической и потенциальной энергии системы называется *механической энергией*:

$$E = K + U$$

- В системе с одними только консервативными силами полная энергия остаётся неизменной. Могут происходить только превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно:

$$E = K + U = \text{const}$$

- Изменение механической энергии равно работе всех неконсервативных сил

$$\Delta E = A_{\text{неконс}}$$

$$(\Delta K = A_{\text{пот}} + A_{\text{непот}} = U_1 - U_2 + A_{\text{неконс}}$$

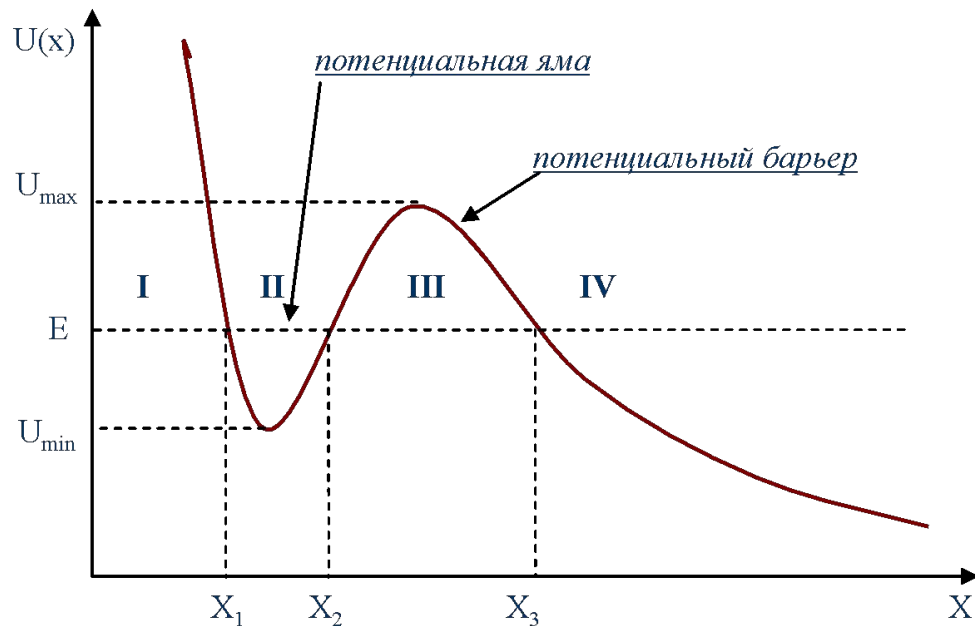
$$\Rightarrow \Delta K + \Delta U = \Delta E = A_{\text{неконс}})$$

Границы движения

$$E = K + U \geq U$$

потенциальная энергия
не может превышать полную
⇔

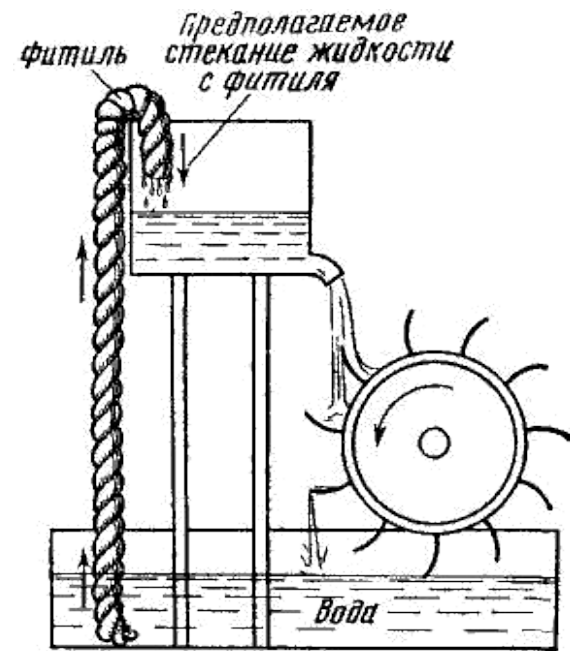
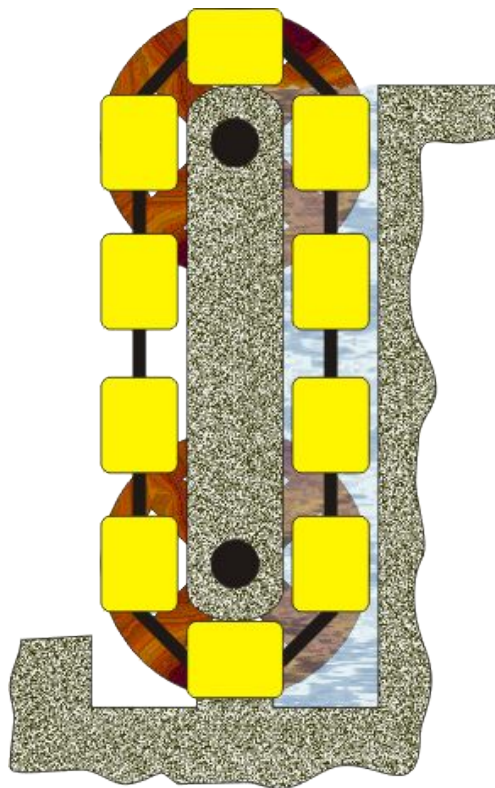
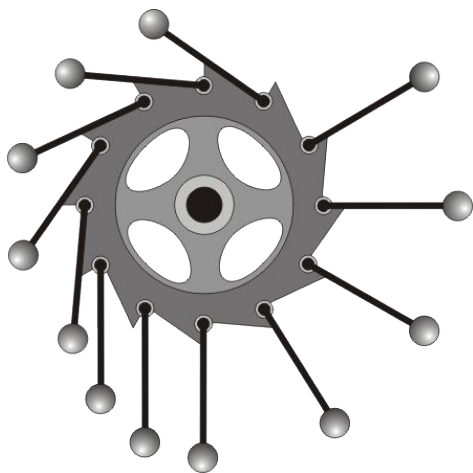
- частица не может находиться в областях I и III
- II – область финитного движения, частица заперта в «потенциальной яме»
- IV – область инфинитного движения
- Из области II в область III частице мешает попасть «потенциальный барьер»



Закон сохранения полной энергии и перпетуум мобиле (вечный двигатель) I рода

- Энергия никогда не создаётся и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между частями системы

Проекты вечных двигателей



Столкновение тел. Абсолютно упругий неупругий удар.

- Упругое столкновение двух шаров
 - Лобовое столкновение
 - Нецентральный удар
- Неупругий удар

Абсолютно упругий удар. Замедление нейтронов

1. $mv + Mu = mv_0$
2. $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \Leftrightarrow$
 $v = (m - M)v_0 / (m + M)$
 $u = 2mv_0 / (m + M)$

- Решение в С-системе: $V_c = mv_0 / (m + M)$

1. $mv_c + Mu_c = mv_{0c} + Mu_{0c} = 0$
2. $\frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}Mu_c^2 = \frac{1}{2}mv_{0c}^2 + \frac{1}{2}Mu_{0c}^2$
 $v_c = -v_{0c} \Leftrightarrow v = -v_0 + 2V_c = (m - M)v_0 / (m + M)$
 $u_c = -u_{0c} \Leftrightarrow u = -u_0 + 2V_c = 2mv_0 / (m + M)$

- Доля потерянной энергии: $\Delta K/K = 4mM / (m + M)^2$
максимальна (=1) при $m = M$ (замедление нейтронов)
- Нецентральный упругий удар по покоящемуся бильярдному шару: шары разлетаются под прямым углом!

Абсолютно неупругий удар – тела движутся как единое целое

- $mv_0 = (m + M)u$
- Сколько энергии «исчезает»:
- $Q = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{1}{2} (m + M)u^2 = \frac{mMv_0^2}{2(m + M)}$
- Доля «исчезнувшей» энергии:
 $Q/K_0 = M/(m + M)$
- Пуля и маятник: $m = 0,5 \text{ г}; M = 1 \text{ кг} \Rightarrow$
 $Q/K_0 = M/(m + M) \approx 1 - m/M = 99,95\%$ - в тепло переходит почти вся энергия пули!

Вторая космическая скорость

Минимальная скорость, необходимая для преодоления земного тяготения:

$$K_{\min} + U = U(\infty) = 0 \Leftrightarrow$$

$$Mv_{\parallel}^2/2 + (-GmM/R) = 0 \Leftrightarrow$$

$$v_{\parallel} = (2GM/R)^{1/2} = (2gR)^{1/2} = 11.2 \text{ км/с}$$

Сила трения – неконсервативная, диссипативная сила

- $\mathbf{F} = -F\mathbf{v}/v$ зависит от относительных скоростей
- $A = -\int F\mathbf{v}/v \, dr = -\int Fv \, dt = -\int Fv \, dt = -Fs_{\text{отн}}$
 1. полная работа силы трения скольжения всегда отрицательна – это диссипативная сила
 2. работа по замкнутой траектории не равна нулю – это неконсервативная сила