

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПО
ЗЕМЛЕУСТРОЙСТВУ»



Факультет Заочный
Специальность 120300 «Землеустройство»
Кафедра Землеустройства

Дисциплина «Экономико-математические методы и
моделирование»

Лекция 2. Распределительный метод
линейного программирования

Лектор: доцент кафедры землеустройства,
к.э.н. Сорокина Ольга Анатольевна



План лекции

1. Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.
2. Понятие и сущность транспортной задачи
3. Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом
4. Методы составления первого опорного плана (решения)
5. Алгоритм метода минимального элемента
6. Алгоритм метода максимального элемента
7. Алгоритм метода аппроксимации на \min
8. Алгоритм метода аппроксимации на \max
9. Проверка опорного решения на оптимальность методом потенциалов
10. Улучшение опорного плана методом построения улучшающего многоугольника
11. Дополнительные ограничения

1. Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.

- Все задачи землеустроительного проектирования имеют многовариантный характер, а величины, которыми оперируют, выражаются численно (площади, длины линий, координаты, валовой объем продукции, прибыль). Их можно связать системой уравнений и неравенств и объединить определенной целевой функцией, установкой.
- Используя методы программирования можно учесть все имеющиеся условия, и, избегая длительных ручных расчетов, получить наилучший результат.

1. Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.

- В проекте внутрихозяйственного землеустройства проводят трансформацию угодий, рассчитывают потребность скота в кормах и источники их покрытия.
- При межхозяйственном землеустройстве используют экономико-математические модели определения оптимального размера землевладения СХП, оптимизации перераспределения земель СХП.

2. Понятие и сущность транспортной задачи

Постановка задачи:

Имеется m поставщиков с запасом A_i ($i=1, 2, \dots, m$);

i - номер поставщика;

И n — потребителей с потребностями грузов B_j ($j= 1, 2, \dots, n$);

j — номер потребителя;

индексы i, m принадлежат строке; j, n — столбцу.

Известна стоимость перевозки единицы груза по каждому возможному маршруту c_{ij} из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения.

Требуется определить такие оптимальные маршруты поставок x_{ij} от i -го поставщика к j -му потребителю (т.е. такой план перевозок), чтобы значение целевой функции достигало своего экстремума (\min, \max).

x_{ij} — объем груза, перевозимого из i -го пункта отправления в j -ый пункт назначения.

2. Понятие и сущность транспортной задачи. Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи

Пункт назначения Пункт отправления	1	2	$j \dots$	n	Запасы груза a_i
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{1j} X_{1j}	C_{1n} X_{1n}	A_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	A_2
$i \dots$	C_{i1} X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	A_i
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{mj} X_{mj}	C_{mn} X_{mn}	A_m
Потребность в грузах B_i	B_1	B_2	B_j	B_n	$\sum A_i$ $\sum B_j$

2. Понятие и сущность транспортной задачи.

Особенности транспортной задачи

1. Переменные в транспортной модели выражаются в одних и тех же единицах измерения (га, км, руб, ц и т. д.).
2. Коэффициенты при переменных в ограничениях модели всегда равны единице.
3. Каждая переменная входит в два ограничения: в ограничение – по строке и в ограничение по столбцу.
4. Все ограничения представлены в виде уравнений .

3. Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом

Экономико-математическая модель состоит из трех составных частей :

1. целевая функция;
2. система ограничений ;
3. неотрицательность переменных.

Структурная запись

I. Целевая функция: $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min(\max)$
Развернутая запись

$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \dots + C_{mn}X_{mn} \longrightarrow \min(\max)$, где
 C_{ij} — стоимость единицы груза из i -го
пункта отправления в j -ый пункт
назначения.

II. Система ограничений

Ограничения по строкам

Количество перевозимых грузов из i -го пункта отправления в j -ые пункты назначения равно запасу i -го пункта отправления.

Структурная запись
$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = A_i (i = 1 \dots m)$$

Развернутая запись
$$x_{11} + x_{12} + x_{1j} + \dots + x_{1n} = A_1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{2j} + \dots + x_{2n} = A_2$$

$$x_{i1} + x_{i2} + x_{ij} + \dots + x_{in} = A_i$$

$$x_{m1} + x_{m2} + x_{mj} + \dots + x_{mn} = A_m$$

Количество перевозимых грузов из **i**-х пунктов отправления в **j**-ый пункт назначения должно равняться потребности в **j**-м пункте назначения.

Ограничения по столбцам

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = b_j \quad (j = 1 \dots n)$$

Развернутая запись

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{i1} + \dots x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{i2} + \dots x_{m2} = b_2 \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{ij} + \dots x_{mn} = b_j \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{in} + \dots x_{mn} = b_n \end{array} \right.$$

Балансовое условие:

Количество распределяемых грузов и потребности в них должны быть равны:

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j$$

Развернутая запись:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_m = B_1 + B_2 + \dots + B_n,$$

если $\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j$,
закрытая;

модель задачи

если $\sum_{i=1}^m A_i \neq \sum_{j=1}^n B_j$,

модель задачи открытая

Для решения задачи открытую модель приводят к закрытому виду путем введения фиктивного пункта отправления с запасом, равным:

$$A_{m+1} = \sum_{j=1}^n B_j - \sum_{i=1}^m A_i$$

или фиктивного пункта назначения с потребностью, равной:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$$

Стоимость перевозок грузов по фиктивному пункту принимают равными «0».

$$C_{im+1} = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$C_{im+1} = 0 (1, 2, \dots, n)$$

При расчете разностей μ_k фиктивные элементы (столбец или строка) участвуют в последнюю очередь.

III. Условие неотрицательности
переменных

$$X_{ij} \geq 0$$

4. Методы составления первого опорного плана (решения)

- 1. Метод северо-западного угла.**
- 2. Метод наилучшего элемента
(минимального, максимального в
зависимости от критерия оптимизации).**
- 3. Метод аппроксимации.**

5. Алгоритм метода минимального элемента

- На каждом шаге алгоритма поиска опорного решения стараются занять максимально возможным ресурсом прежде всего те клетки транспортной таблицы, в которых стоят наименьшие величины C_{ij} .
1. Из всех оценок C_{ij} в таблице выбирают наименьшее.
 2. В соответствующую клетку записывают значение X_{ij} , равное наименьшему из соответствующих величин A_i , B_j .
 3. Определяют новые значения величин A_i , B_j .
 4. Если запас груза A_i равен нулю а потребность в грузе B_j больше нуля, то из таблицы вычеркивают соответствующую строку. Если B_j равен нулю, то вычеркивают столбец. Если обе величины A_i , B_j равны нулю, то вычеркивают только строку или только столбец. С оставшимся элементом далее работают как обычно.
 5. Далее указанные операции повторяются до тех пор пока все ресурсы не будут распределены по клеткам.

5. Алгоритм метода минимального элемента

6. Полученное решение необходимо проверить по числу занятых клеток их должно быть $m + n - 1$. Если число занятых клеток равно этому условию, то такое решение называется невырожденным, если число занятых клеток меньше, то это решение вырождено. Вырожденность можно преодолеть. Если число занятых клеток больше, то нужно искать ошибку в решении.
Также проверяем сходится ли сумма по строке с запасами груза A_i , и сумма по столбцу с B_j .
7. Далее считаем целевую функцию.

6. Алгоритм метода максимального элемента

При решении задачи на максимум приведенный алгоритм меняется только в первом шаге:

вместо минимального значения C_{ij} находят максимальное и далее работают с соответствующей клеткой.

7. Алгоритм метода аппроксимации на \min

- На каждом шаге выбор, очередной клетки, заполняемой ресурсом, осуществляется не на основе строго локальных оценок стоимостей C_{ij} , как в методе минимального элемента, а на основе разностей между оценками. Это позволяет приближенно оценивать полезность данного шага с точки зрения скорейшего приближения к оптимальному решению.
1. по каждому столбцу и строке находят 2 минимальных значения C_{ij} .
 2. определяют их разности μ_i для строк и μ_j для столбцов.
 3. из всех разностей выбирают наибольшую μ_{\max} .
 4. по строке или столбцу, к которым относится μ_{\max} , в клетку где размещается наименьшее значение C_{ij} , записывают значение X_{ij} равное наименьшей из соответствующих величин A_i B_j .

7. Алгоритм метода аппроксимации на \min

5. Если запас груза A_i равен нулю а потребность в грузе B_j больше нуля, то из таблицы вычеркивают соответствующую строку. Если B_j равен нулю, то вычеркивают столбец. Если обе величины A_i , B_j равны нулю, то вычеркивают только строку или только столбец. С оставшимся элементом далее работают как обычно.
6. далее указанные операции повторяются до тех пор пока все ресурсы не будут распределены по клеткам.
7. Полученное решение необходимо проверить по числу занятых клеток их должно быть $m + n - 1$.
проверяем сходится ли сумма по строке с запасами груза A_i , и сумма по столбцу с B_j .
8. Далее считаем целевую функцию.

7. Алгоритм метода аппроксимации на \min

- При реализации данного алгоритма возможны некоторые особенности:
- Величины разностей могут иметь одинаковое наибольшее значение. В этом случае нужно брать ту разность для которой в соответствующих столбцах или строках находится наименьшее значение C_{ij} .
- Если таких C_{ij} несколько то для решения берут ту клетку, которую можно заполнить наибольшим значением X_{ij} .
- В случае если выбывают 2 элемента необходимо выбрать какой выгоднее вычеркнуть. Для этого по рассматриваемым строке и столбцу выбираем наименьшее значение C_{ij} и вычеркиваем тот элемент, где C_{ij} больше.

8. Алгоритм метода аппроксимации на \max

При решении задач на максимум приведенный алгоритм меняется в двух пунктах:

1. вместо двух минимальных находят 2 максимальных значения C_{ij} ,
4. заполняют клетку грузом с наибольшим значением C_{ij} .

9. Проверка опорного решения на оптимальность методом потенциалов

- После получения первоначального опорного плана необходимо проверить его на оптимальность. Для определения оптимальности плана используются потенциалы, которые вычисляются по занятым клеткам, по следующим формулам:
$$\alpha_i + c_{ij} = \beta_j, \quad \alpha_i = \beta_j - c_{ij}$$

где α_i – потенциалы по строкам; β_j – потенциалы по столбцам.

- За первый потенциал берется любое число. Чтобы потенциалы были только положительными, необходимо первый потенциал взять чуть больше наибольшей оценки C по матрице

Условие оптимальности

**План является оптимальным, если для свободных клеток:
при решении задач**

на min: $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$, или $\sigma_{ij} \geq 0$

на max: $\alpha_i + c_{ij} \leq \beta_j$ $\delta_{ij} \geq 0$

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \longrightarrow \min$$

$$Z_{\text{конт}} = \sum_{j=1}^n B_j \beta_j - \sum_{i=1}^m A_i \alpha_i$$

$$Z_{\text{конт}} = Z$$

10. Улучшение опорного плана методом построения улучшающего многоугольника

Если условие оптимальности выполняется для всех клеток, то план оптимален. Если условие не выполняется, необходимо провести улучшение плана методом построения улучшающего многоугольника.

Правило построения улучшающего многоугольника:

1. Стороны многоугольника должны быть параллельны строкам и столбцам матрицы.
2. Строится многоугольник для свободной неотрицательной клетки. Шагать можно по занятым клеткам с поворотом под прямым углом.
3. Знаки присваиваются «+» вершине в свободной клетке; и далее знаки чередуются «-» «+» «-».
4. Вершины многоугольника должны находиться в занятых клетках, кроме одной начальной, лежащей в испытываемой свободной клетке.

Начинаем строить улучшающий многоугольник для свободной клетки, в которой характеристика максимальна по модулю. Из отрицательных вершин выбираем наименьшее значение и перемещаем его по вершинам многоугольника.

Контроль вычислений:

После каждого улучшения значение целевой функции должно увеличиваться или уменьшаться (в зависимости критерия оптимизации).

Значение целевой функции для контроля, начиная со 2-ой итерации, вычисляют по формуле

$$Z_{\text{посл}} = Z_{\text{пред}} + \Delta Z$$

$$\Delta Z = \delta_{ij} \cdot \Delta x_{ij}$$

11. Задачи с дополнительными ограничениями

Дополнительные ограничения типа

,

$$x_{ij} \geq D_{ij}$$

причем $D_{ij} < A_i, D_{ij} < B_j$, иначе ограничение теряет смысл.

Для учета этого ограничения необходимо определить измененные объемы производства $A'_i = A_i - D_{ij}$ и потребления $B'_j = B_j - D_{ij}$

Дальнейший алгоритм действий зависит от конкретных числовых значений рассматриваемых величин A'_i и B'_j

Если оказалось, что $A'_i = 0$ то соответствующая строка вычеркивается из таблицы. Аналогично, если $B'_j = 0$ то соответствующий столбец вычеркивается из таблицы. Если и $A'_i = 0$ и $B'_j = 0$, то из таблицы вычеркиваются и столбец и строка и далее задача решается по намеченному алгоритму.

11. Дополнительные ограничения вида $X_{ij} = D_{ij}$

Первоначальные действия по учету таких ограничений аналогичны действиям для случая ограничений вида $X_{ij} \geq D_{ij}$

Если же обе указанные величины оказались больше нуля, то дополнительно проводится блокировка соответствующей оценки C_e . При решении задач на \min оценку делают равной большой величине, значительно большей величины C_y , например, $C_y = 10000$; это означает, что мы делаем невыгодной транспортировку из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения, т. к. стоимость транспортировки стала очень большой. В результате алгоритм решения задачи не допускает возрастания величины X_y свыше D_y , что и требуется по условию.

Если задача решается на \max , то необходимо было бы положить $C_y = 0$, что также означало невыгодность передачи груза из i -го пункта отправления в j -й пункт назначения свыше предписанного груза D_y (дополнительная прибыль от такой передачи была бы равна нулю).

Помимо рассмотренных выше ограничений на практике встречаются дополнительные ограничения вида $L_{ij} \leq X_{ij} \leq D_{ij}$ (в частном случае при $L_y = 0$ имеем $X_{ij} \leq D_{ij}$)

Ограничения данного вида не учитываются при постановке задачи. Их анализ ведется после получения оптимального решения задачи.

После получения оптимального решения, учитывают все дополнительные ограничения. Для этого дополняют таблицу выброшенными ранее строкой и столбцом, в которых должно быть записано указанное значение X_y , кроме того необходимо восстановить первоначальные значения A_i, B_j .

Бессмысленно последнюю таблицу проверять на оптимальность методом потенциалов, т. к. мы принудительно изменили полученное оптимальное решение для того, чтобы учесть дополнительные условия.

После получения оптимального решения рисуется новая матрица окончательного решения, в которой учитываются ограничения.

Таким образом, после решения проверяют:

- 1) Учитываются ли дополнительные условия.
- 2) Восстанавливают первоначальные значения величин A_i, B_j .
- 3) В результате получаем новую таблицу.
- 4) Вычеркиваем из последней таблицы фиктивную строку (столбец), (получаем окончательное решение)
- 5) Записываем ответ.

Порядок полного оформления решений задач транспортного типа

- 1). Дать пояснение всех обозначений, используемых при постановке задачи, с указанием единиц измерения всех величин (A_i , B_j , C_{ij} , X_{ij}).
- 2). Дать математическую формулировку дополнительных условий, учитываемых в постановке задачи.
- 3). Проверить задачу на сбалансированность и, при необходимости, привести к сбалансированному виду.
- 4). Привести структурную запись задачи (ограничения по строкам, ограничения по столбцам, балансовое условие, условие неотрицательности переменных, требование к целевой функции).
- 5). Привести развернутую запись задачи (ограничения по строкам, ограничения по столбцам, требование к целевой функции).
- 6). Получить опорное решение заданным способом (процесс решения отразить в таблице).
- 7). Проверить опорное решение на оптимальность и, при необходимости, получить оптимальное решение методами потенциалов и улучшающего многоугольника (процесс решения отразить в таблицах).
- 8). Записать решение поставленной задачи, и дать его интерпретацию с учетом дополнительных условий (при их наличии) и исходной несбалансированности задачи (если она была), после чего записать окончательное решение задачи.

Схема оформления и методы решения задач транспортного типа

Демонстрационная задача №1

Найти минимум затрат на перевозку кормов с севооборотных массивов на животноводческие фермы. Данные по затратам на перевозку единицы груза с учетом удаленности участков от производственных центров приведены в табл. 1.

Таблица 1 Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи

Фермы Севообороты	Удельные затраты на перевозку грузов, руб/т					Ресурсы севооборотов, т
	Ферма1	Ферма2	Ферма3	Ферма4	Ферма5	
Полевой-1	55	48	49	60	25	149
Полевой-2	45	35	96	55	66	163
Кормовой	47	66	90	97	20	382
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	

Порядок выполнения задачи:

1. Записать математическую формулировку задачи в общем виде.
2. Дать развернутую запись условия задачи с числовым значением переменных и ресурсов.
3. Задачу решить, используя метод наилучшего элемента.
4. Записать ответ.

Определение опорного решения задачи методом минимального элемента

Формализация исходных данных задачи:

Введем следующие обозначения:

m - количество севооборотов (пунктов отправления);

n - количество ферм (пунктов назначения);

i - номер севооборота :

$i = 1, 2, \dots, m;$

j - номер фермы:

$j = 1, 2, \dots, n;$

i - i , m – индексы строк; j , n – индексы столбцов;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы объема продукции с i –го севооборота на j -ую ферму;

X_{ij} – объем перевозимой продукции с i –го севооборота на j –ую ферму;

A_i - объем продукции, производимой на i –ом севообороте и предназначенной для транспортировки на фермы, т;

B_j - потребность j –ой фермы в кормах, т;

Z - целевая функция.

- Сумма объемов продукции, производимой на всех севооборотных массивах, должна быть равна общей потребности ферм в кормах: найти такие объемы транспортировки кормов с севооборотных массивов на фермы, при которых целевая функция примет минимальное значение:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$

- **Запись задачи транспортного типа в структурной форме:**

Ограничения по строкам:

- Сумма перевозимых кормов с i –го севооборотного массива на j –е фермы должна быть равна запасу кормов данного севооборота:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = A_i; i = 1, 2, \dots, m;$$

Ограничения по столбцам:

- Сумма объемов продукции, доставляемых на j –ую ферму со всех севооборотов, должна быть равна потребности в кормах на данной ферме:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = B_j; j = 1, 2, \dots, n;$$

Балансовое условие:

- Сумма объемов продукции, производимой на всех севооборотных массивах, должна быть равна общей потребности ферм в кормах.

- **Условие неотрицательности переменных:**

$$\sum_{i=1}^m A_i = \sum_{j=1}^n B_j$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n;$$

- Проверка сбалансированности задачи

- Должно быть

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j$$

- $\sum_i A_i = 149 + 163 + 382 = 694$

- $\sum_j B_j = 139 + 165 + 120 + 130 + 140 = 694$

- Задача сбалансирована (закрыта).

- Матричная запись исходных данных задачи после учета требований сбалансированности представлена в табл.3.

- Таблица 2 Табличное представление исходных данных задачи

Фермы →	Удельные затраты на перевозку груза, тыс.руб/т					Ресурсы севооборотов, т
севообороты ↓	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5	
Полевой-1	55 X11	48 X12	49 X13	60 X14	25 X15	149
Полевой-2	45 X21	35 X22	96 X23	55 X24	66 X25	163
Кормовой	47 X31	66 X32	90 X33	65 X34	20 X35	382
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	694

- 1) *целевая функция*
- $Z = 55x_{11} + 48x_{12} + 49x_{13} + 60x_{14} + 25x_{15} + 45x_{21} + 35x_{22} + 96x_{23} + 55x_{24} + 66x_{25} + 47x_{31} + 66x_{32} + 90x_{33} + 65x_{34} + 20x_{35} \rightarrow \min;$
- 2) *граничные условия*
- *Ограничения по строкам исходной матрицы:*
- $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 149,$
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 163,$
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 382;$
- *Ограничения по столбцам исходной матрицы:*
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 139,$
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 165,$
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 120,$
- $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 130,$
- $x_{15} + x_{25} + x_{35} = 140.$
- 3) *балансовое условие:*
- $149 + 163 + 382 = 139 + 165 + 120 + 130 + 140 = 694;$
- 4) *условие неотрицательности неизвестных:*
- $x_{11,12,13,14,15,21,22,23,24,25,31,32,33,34,35} \geq 0$

Таблица 4 Получение опорного решения методом наилучшего минимального элемента

Фермы	Удельные затраты на перевозку груза, тыс.руб/т					Ресурсы севооборотов, т		
севообороты	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5			
Полевой-1	55	48	49	60	25	149	147	27
Полевой-2	45	35	96	55	66	163		
Кормовой	47	66	90	65	20	382	242	103
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	694		

- Проверка опорного решения на выполнение граничных условий:

- а) по строкам:

- $2+120+27=149$
- $163=163$
- $139+103+140=382$

- б) по столбцам:

- $139=139$
- $163+2=165$
- $120=120$
- $27+103=140$

- Граничные условия по строкам и столбцам выполняются.

- Проверка по числу занятых клеток $K_{зан}$

- Количество занятых клеток в опорном плане должно быть равно условию вырожденности:
 $K_{зан} \leq m + n - 1$, где m – число строк, n – число столбцов.

- В нашем случае $K_{зан} = 7$ и $(m+n-1) = 3+5-1=7$; то есть решение верное и невырожденное.

- Вычисление целевой функции:

- $Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} = 2*48 + 120*49 + 27*60 + 163*35 + 139*47 + 103*65 + 140*20 = 29329$

- Проверка опорного решения на оптимальность.

- Введем новые характеристики (потенциалы поставщиков и потребителей продукции и соответственно.

$$\alpha_i \quad \beta_j$$

- Для занятых клеток $\alpha_i + C_{ij} = \beta_j$;
- За первый потенциал примем $\alpha_1 = \text{const}$ – произвольное число;
- $C_{ij} \max = 90$, чтобы обеспечить положительность,
- тогда $\beta_2 = 90 + 48 = 138$ и т.д.
- Оценка свободной клетки вычисляется по формуле

$$\delta_{ij} = \alpha_i + C_{ij} - \beta_j;$$

- При решении задач на \min решение является оптимальным, если для всех свободных клеток $\delta_{ij} \geq 0$
- Для свободных клеток считаем оценки δ_{ij} и размещаем их в
- правом нижнем углу свободной клетки (табл.5).

- Потенциалы α_i, β_j и оценки δ_{ij} для опорного решения задачи

Севообороты		Удельные затраты на перевозку груза, тыс. руб/т					Ресурсы севооборотов, т
	β_j	132	138	139	150	105	
α_i		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5	
90	Полевой – 1	55 13	48 2	49 120	60 27	25 10	149
103	Полевой – 2	45 16	35 163	96 60 <input type="text"/>	55 8	66 64	163
85	Кормовой	47 139	66 13 <input type="text"/>	90 36	65 103	20 140	382
Потребности ферм в кормах, т		139	165	120	130	140	694

- В данном случае для всех свободных клеток условие оптимальности выполняется, поэтому полученное решение оптимально.
- Целевую функцию вычисляем для контроля формул, используя вычисленные потенциалы α_i и β_j :

- $$Z = \sum_{j=1}^n \beta_j B_j - \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$$

- $Z_{\text{контр.}} = (62 \cdot 139 + 68 \cdot 165 + 69 \cdot 120 + 80 \cdot 130 + 35 \cdot 140) - (20 \cdot 149 + 33 \cdot 163 + 15 \cdot 382) = 29329.$
- Формализованное представление оптимального решения задачи приведено в табл.6.

Таблица 6 Оптимальное решение задачи

$i \backslash J$	1	2	3	4	5	Ресурсы, т
1	55	48 2	49 120	60 27	25	149
2	45	35 163	96	55	66	163
3	47 139	66	90	65 103	20 140	382
Потреб - ности, т	139	165	120	130	140	694 694

- Ответ: затраты на перевозку кормов с севооборотных массивов на животноводческие фермы будут минимальны и равны 29329 тыс. рублей при следующем распределении перевозок с севооборотов на фермы:
- с полевого севооборота 1: 2 т на 2 ферму, 120 т на 3 ферму, 27 т на 4 ферму;
- с полевого севооборота 2: 163 т на 2 ферму;
- с кормового севооборота: 139 т на 1 ферму, 103 т на 4 ферму, 140 т на 5 ферму.

The background of the slide features a pattern of stylized, overlapping autumn leaves in various shades of orange and brown. The leaves are depicted with simple outlines and some internal vein details, creating a textured, seasonal feel.

Спасибо за внимание!