

ФГБОУ ВПО «Омский государственный педагогический университет»

Десятая проблема

Гильберта



Выполнила:

магистрант 2 курса

Магистерская программа:

«Математическое образование»

Истомина Ирина

Омск - 2013

Пролог

Диофант – последний великий математик античности.

Основным произведением Диофанта была "Арифметика".

В этой книге произошел окончательный отказ от так называемой "геометрической алгебры" и переход к новому математическому языку, так называемой "буквенной алгебре".



Диофант Александрийский
3 в. н.э.

Диофантовы уравнения

Основные направления деятельности Диофанта:

- 1) Арифметико – алгебраическое направление;
- 2) Исследование неопределенных уравнений.

Уравнение вида:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

где P – многочлен с целыми коэффициентами, а $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$, называется **диофантовым уравнением**.

Пример 1:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

если тройка натуральных чисел (x_0, y_0, z_0) ему удовлетворяет то по теореме, обратной к теореме Пифагора, из отрезков длины x_0 , y_0 и z_0 можно сложить прямоугольный треугольник и, таким образом, построить прямой угол.

Решение: $x = (m^2 - n^2)l$ $y = 2mnl$
 $z = (m^2 + n^2)l$ $m \in N, n \in N, l \in N$

Пример 2:

$$x^n + y^n = z^n, n \in \mathbb{N}$$



Пьер Ферма
(1601 - 1665)

Великая теорема Ферма

Это уравнение при $n > 2$ не имеет решений в целых числах.

Эта задача, казалось бы, не слишком отличается от предыдущей, на самом деле оказалась чудовищно трудной.

Возникает вопрос:

Нет ли какого-нибудь способа по виду уравнения, по его коэффициентам определять, имеет ли это уравнение решение в целых числах?

Десятая проблема



Давид Гильберт
(1862 - 1943)

8 августа 1900 года на заседании 5-й и 6-й секций **II Международного конгресса математики** со своим докладом выступил знаменитый немецкий математик, профессор Геттингенского университета **Давид Гильберт**.

Его доклад носил скромное название **«Математические проблемы»**, но в нём Гильберт перечислил наиболее насущные и важнейшие **23 проблемы** математики.

Задача о разрешении диофантовых уравнений (Десятая проблема Гильберта)

Пусть задано произвольное **диофантово уравнение** с произвольным числом неизвестных

Указать общий метод, следуя которому можно было бы в конечное число шагов узнать, имеет данное уравнение в целых числах или нет.

Задача о разрешении диофантовых уравнений

Десятая проблема Гильберта является примером **массовой проблемы**.

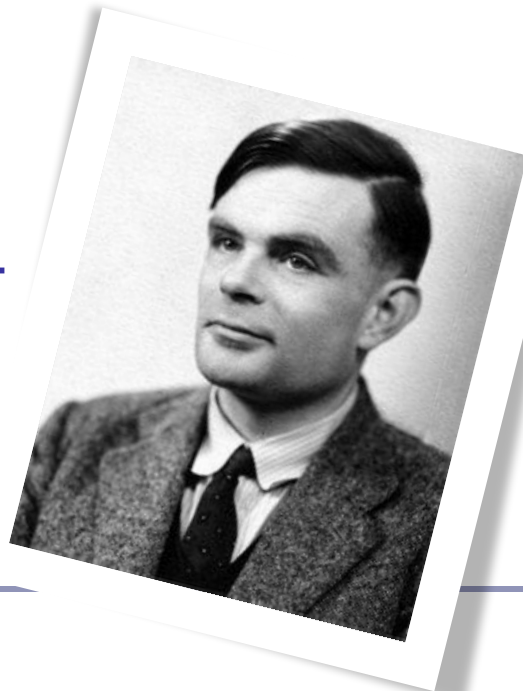
Массовая проблема — это проблема, состоящая из счётного множества **индивидуальных проблем**, на каждую из которых надо дать конкретный ответ «**ДА**» или «**НЕТ**».

Суть массовой проблемы: требуется найти единый метод, пригодный для получения ответа на любую из её индивидуальных подпроблем.

Что такое «общий метод» и какими средствами он может быть реализован?

В начале 30-х г.г. XX в. выработано понятие «общего метода», или **алгоритма**, которое дало принципиальную возможность устанавливать невозможность алгоритма с требуемыми свойствами, или его существование.

**Алан Тьюринг
(1912-1954)**



**Алонзо Чёрч
(1903-1995)**

И уже в 1944 году Э. Пост пишет в одной из своих работ:



**Эмиль Пост
(1897-1954)**

*«...десятая проблема
Гильберта молит о
доказательстве
неразрешимости»*

Гипотеза Дэвиса



Мартин Дэвис
род. 1928 г.

М. Дэвис перешёл от формулировки Десятой проблемы Гильберта в **целых числах** к естественной для теории алгоритмов формулировке в **натуральных числах**.

Он рассуждал следующим образом:

Для конкретного диофантова уравнения проблема распознавания **наличия целочисленных решений** и проблема распознавания **наличия неотрицательных целочисленных решений** — это две разные проблемы.

Гипотеза Дэвиса

С другой стороны, пусть

$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ (1) - произвольное диофантово уравнение, и мы интересуемся наличием у него неотрицательных решений.

Рассмотрим систему уравнений :

$$\begin{cases} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\ x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \\ \dots \\ x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\ x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \quad (2) \\ \dots \\ x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2 \end{cases} \quad P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

Понятно, что:

- 1) что любое решение системы (2) в произвольных целых числах содержит решение уравнения (1) в неотрицательных целых числах.
- 2) что для любого решения уравнения (1) в неотрицательных целых числах x_1, x_2, \dots, x_n найдутся целочисленные значения $y_{1,1}, \dots, y_{n,4}$, дающие решение системы (2), так как каждое неотрицательное целое число представимо в виде суммы квадратов четырёх целых чисел (Теорема о четырех квадратах).

$$\left\{ \begin{array}{l} P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ x_1 = y_{1,1}^2 + y_{1,2}^2 + y_{1,3}^2 + y_{1,4}^2 \\ x_2 = y_{2,1}^2 + y_{2,2}^2 + y_{2,3}^2 + y_{2,4}^2 \quad (2) \quad P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (1) \\ \dots \\ x_n = y_{n,1}^2 + y_{n,2}^2 + y_{n,3}^2 + y_{n,4}^2 \end{array} \right.$$

Система (2) может быть свёрнута в одно уравнение :

$$E(x_1, x_2, \dots, x_n, y_{1,1}, \dots, y_{n,4})$$

-разрешимое в целых числах тогда и только тогда, когда исходное уравнение (1) разрешимо в неотрицательных целых числах.

Таким образом, проблема распознавания наличия решений в неотрицательных целых числах сводится к массовой проблеме распознавания наличия решений в целых числах.

Гипотеза Дэвиса

Тем самым установлено, что для доказательства неразрешимости 10-й проблемы Гильберта в её оригинальной постановке достаточно доказать неразрешимость её аналога, касающегося наличия или отсутствия решений в неотрицательных целых – в числах натуральных.

Гипотеза Дэвиса

наряду с классическими диофантовыми уравнениями:

$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$

Дэвис рассмотрел их параметрическую версию:

$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ – параметры, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ – переменные.

Гипотеза Дэвиса

$P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, где P – многочлен с целыми коэффициентами, $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$ - **параметры**, $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ - **переменные**.

При одном наборе значений параметров уравнение может иметь решение, при другом решений может не существовать.

Дэвис выделил множество M , которое содержит все наборы значений параметров при которых уравнение имеет решение:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \{P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

Гипотеза Дэвиса

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \\ \{P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

- (1) – диофантово представление множества
 M – диофантово множество

Для доказательства неразрешимости десятой проблемы Гильберта нужно было лишь показать **диофантовость** любого **перечислимого** множества.

Перечислимое множество - множество конструктивных объектов, все элементы которого могут быть получены с помощью некоторого алгоритма.

Для доказательства неразрешимости десятой проблемы Гильберта нужно было лишь показать **диофантовость** любого **перечислимого** множества.

то есть нужно показать возможность построения уравнения, которое имело бы натуральные корни x_1, x_2, \dots, x_n только при всех $\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle$, принадлежащих этому перечислимому множеству.

Всё это привело Дэвиса к следующей гипотезе:

Понятия диофантового и перечислимого множества совпадают. Это значит, что множество диофантово тогда и только тогда, когда оно перечислимо.

Дэвис также сделал первый шаг — доказал, что любое перечислимое множество можно представить в виде:

Нормальная форма Дэвиса

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists z \forall y < z \exists x_1, x_2, \dots, x_n \\ \{P(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

Гипотеза Робинсон



Джулия Робинсон
(1919-1985)

Исследовала вопрос о том, является ли диофантовым множество, состоящее из троек :

$$\langle a, b, c=a^b \rangle$$

Найти диофантово представление для операции возведения в степень ей не удалось, но, тем не менее, в своей работе она показала **достаточное условие** для его существования.

Гипотеза Робинсон

Достаточное условие для существования диофантова представления для операции возведения в степень

$$\langle a, b \rangle \in M \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \{P(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0\}$$

Его определяет отношение $J(a, b)$ со следующими свойствами:

1) $\forall a, b \in M: J(a, b)$

$\Rightarrow a < b^b$

2) $\forall k \exists a, b \in M: J(a, b) \wedge$

$a > b^k$

$J(a, b)$ – «зависимость экспоненциального роста»
или «предикат Робинсон»

Дэвис и Патнем: объединение усилий



Хилари Патнем
род. 1926г.

В 1958 году М. Дэвис и Х. Патнем публикуют работу в которой они рассмотрели класс **экспоненциально-диофантовых** уравнений, имеющих вид:

$$E_L(x_1, x_2, \dots, x_n) = E_R(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где E_L , E_R — экспоненциальные многочлены, то есть выражения, полученные из переменных и рациональных чисел с применением операций сложения, умножения и возведения в степень.

Дэвис, Патнем и Робинсон: объединение усилий

В 1961 году в совместной работе Робинсон, Дэвиса и Патмена было получено экспоненциально - диофантово представление для любого перечислимого множества:

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_m \rangle \in M \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n \\ \mathbf{E}_L(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{E}_R(a_1, a_2, \dots, a_m, x_1, x_2, \dots, x_n) \}$$

Одним из следствий работы стала возможность сведения любого **показательно-диофантова** уравнения к **экспоненциально-диофантову** уравнению с фиксированным числом переменных.

Чтобы перенести результат Дэвиса, Патнема и Робинсон на «обычные» диофантовы уравнения, нужно было доказать, что множество, состоящее из троек $\langle a, b, c=a^b \rangle$, является диофантовым. Тогда стало бы возможным ценой введения дополнительных неизвестных перевести экспоненциально-диофантово представление в диофантово представление:

$$a, b, c=a^b \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \dots, x_n P(a, b, c, x_1, x_2, \dots, x_n)=0$$

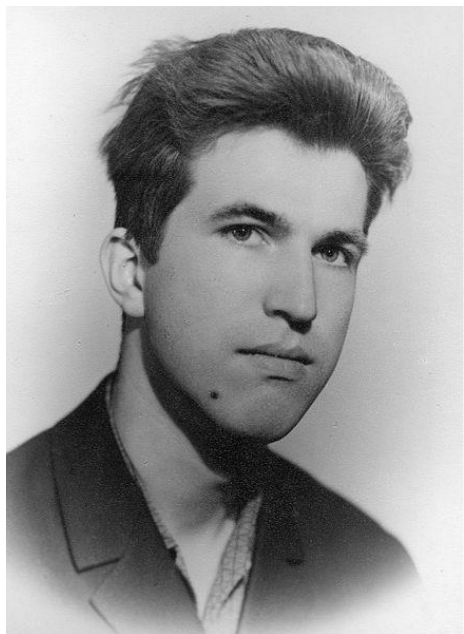
Гипотеза Робинсон

Для этого достаточно построить конкретное уравнение

$$P(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

- недопускающее решение с $a > b^b$
- для каждого k имеющее решение с $a > b^k$

Что сделал Ю.В. Матиясевич?



**Юрий Владимирович
Матиясевич
род .в 1947г.**

Именно такого рода уравнение удалось построить 22-летнему аспиранту Юрию Матиясевичу. в начале 1970 года...

...обратившись к рассмотрению последовательности Фибоначчи.

Числа Фибоначчи , бесконечная последовательность , которая определяется рекуррентной формулой:

$$\Psi_{n+1} = \Psi_{n-1} + \Psi_n$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

$$P(a, b, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

- недопускающее решение с $a > b^b$
- для каждого k имеющее решение с $a > b^k$

Ю.В. Матиясевич заметил, что если:

- 1) за a взять половину номера четного члена последовательности Фибоначчи, а за b — сам член, то неравенство $a > b^b$ будет всегда неверно;
- 2) для любого k можно найти такой четный член последовательности, что неравенство $a > b^k$ будет верно.

Номер члена последовательности	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Член последовательности v	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
Половина номера четного члена последовательности u	0		1		2		3		4		5		6		7
u^u	1		1		4		27		64		3125		47256		823649
u^0	1		1		1		1		1		1		1		1
u^1	0		1		2		3		4		5		6		7
u^2	0		1		4		9		16		25		36		49
u^3	0		1		8		27		64		125		216		343

Ю.В. Матиясевич рассмотрел последовательность, задаваемую соотношениями:

$$\varphi_0=0, \varphi_1=1, \varphi_{n+1}=3\varphi_n-\varphi_{n-1}$$

Получилось в точности последовательность из четных членов первоначальной последовательности:

$$\phi_0=0, \phi_1=1, \phi_2=3, \phi_3=8, \phi_4=21, \phi_5=55, \phi_6=144, \phi_7=377\dots$$

Приняв теперь за a номер члена последовательности, а за b — член последовательности с номером a , т. е. ϕ_a , мы получаем, что снова выполняется требуемое свойство для a и b .

- Осталось построить уравнение $P(a, b, x_1, \dots, x_k) = 0$, которое имело бы натуральное решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} = \Phi_a$
- Для этого достаточно было построить систему диофантовых уравнений $P_1 = 0, \dots, P_n = 0$ в переменных $\mathbf{a}, b, x_1, \dots, x_n$, имеющую решение тогда и только тогда, когда $\mathbf{b} = \Phi_a$ — ведь такая система имеет в точности те же решения, что и единственное уравнение

$$P_1^2 + \dots + P_n^2 = 0$$

Литература

- 1.** Болибрух А.А. Проблемы Гильберта (100 лет спустя). / [Текст] . М., МЦМНО, 1999.
- 2.** Варпаховский Ф.П., Колмогоров А.Н. О решении десятой проблемы Гильберта // Квант.-1970.-№7.-с.39-44
- 3.** Демидов С. Проблемы Гильберта и советская математика // Квант, 1977, №11, с. 31-33
- 4.** Матиясевич Ю.В. Десятая проблема Гильберта. М.: Физматлит. 1993
- 5.** http://www.goldenmuseum.com/1612Hilbert_rus.html

***Спасибо
за внимание
!!!***

Теорема о четырёх квадратах (Лагранж, 1772)



Жосеф Луи Лагранж
(1736 - 1813)

Диофантово уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a$$

имеет решение в целых x_1, x_2, x_3, x_4
при любом неотрицательном
целом a .

