Лекция 6
Нелинейные волны в жидкости. Солитоны

Содержание

1. Нелинейные акустические волны

1) **Решение Римана** (1860 г. первое точное решение нелинейной проблемы)

Ранее акустические волны рассматривались как малые возмущения p, ρ, $\mathbf{v}$. Уравнения Эйлера и непрерывности линеаризовывались $\Rightarrow$ классическое волновое уравнение.

Откажемся от этого подхода, но ограничимся одномерным случаем: $p=p(x,t)$, $\rho=\rho(x,t)$, $\mathbf{v}=\mathbf{v}\,(x,t)$.

Жидкость не вязкая, процесс адиабатический

Уравнение Эйлера $$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}}$$

исключаем p !

Уравнение непрерывности $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \mathrm{v}) = 0$$

Адиабатичность процесса $$\frac{\partial p}{\partial \rho} = c^2(\rho) \Rightarrow \partial p = c^2 \partial \rho$$

$c(\rho)$ - скорость звука, являющаяся функцией плотности

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x} = -\frac{c^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

Введем функцию $\zeta(\rho) = \int (c/\rho)\, d\rho$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{c}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Работаем далее в переменных v и ζ

Уравнение непрерывности $\qquad$ Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\mathrm{v}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+c\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=0 \quad \pm \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+\mathrm{v}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}+c\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta+\mathrm{v})+(c+\mathrm{v})\frac{\partial}{\partial x}(\zeta+\mathrm{v})=0$$

$$\Downarrow$$

решение $\zeta+\mathrm{v}=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta-\mathrm{v})-(c-\mathrm{v})\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\mathrm{v})=0$$

$$\Downarrow$$

решение $\zeta-\mathrm{v}=0$

Вспомогательную величину ζ теперь можно исключить: $\zeta=\pm\mathrm{v}$

Уравнение Римана
$$\boxed{\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\pm(c\pm\mathrm{v})\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=0}$$

В линейной акустике факторизацией 1-мерного волнового

уравнения имеем $\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}\pm c\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}=0 \Longrightarrow \mathrm{v}=F(x-ct)+G(x+ct)$

По аналогии уравнение Римана также описывает 2 волны, бегущие со «скоростью» $c \pm \mathrm{v}$. Ее называют местной или локальной скоростью, зависящей от координаты x ($\mathrm{v}=\mathrm{v}(x)$, $c \neq \mathrm{const}$) .

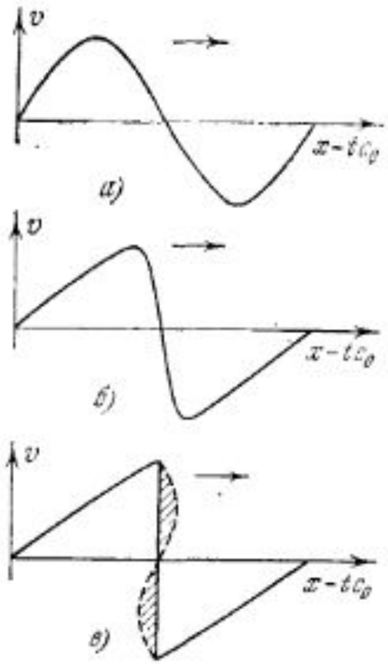
Если уравнением состояния жидкости является адиабата, то

$$c - \mathrm{v} = c_0 + \varepsilon \mathrm{v}\,, \quad \varepsilon = (1+\gamma)/2\,,$$ γ - показатель адиабаты

и решение Римана для волны бегущей в положительном направлении оси x

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_0 + \varepsilon \mathrm{v}}\right)\right]$$

- решение содержит искомую величину v под знаком синуса
- там, где $\mathrm{v}>0$ точки профиля волны ускоряются, где $\mathrm{v}<0$ – тормозятся ⇒ искажению волны в процессе распространения



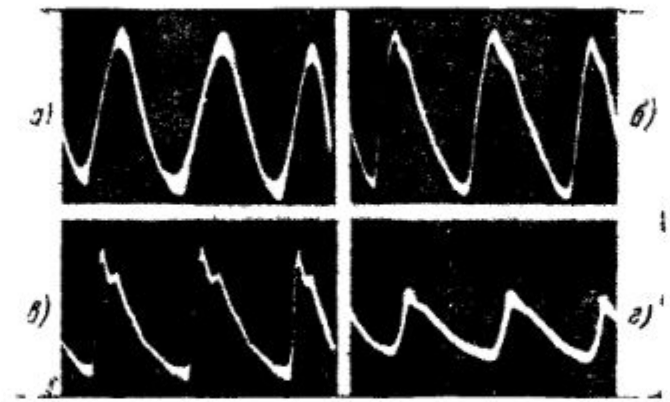


Рис. 18 Осциллограммы формы волны в воде на безразмерных расстояниях от источника звука: *а)* $\sigma = 0{,}16$; *б)* $\sigma = 0{,}8$; *в)* $\sigma = 1{,}6$; *г)* $\sigma = 3{,}9$ [9].

2) **Метод возмущений**

Точное решение Римана не позволяет учесть влияние вязкости и теплопроводности среды. Поэтому при изучении нелинейных волн используют приближенные численные и аналитические методы.

Широкое распространение при изучении нелинейных волн получил метод возмущений (часто в комбинации со спектральным подходом).

Идея метода: в исходные уравнения гидродинамики полевые характеристики (давление, плотность, скорость и.т.д.) подставляют в виде ряда по малым поправкам

$$p = p_0 + p' + p'' + p''' + \dots$$

$$\mathrm{v} = \mathrm{v}' + \mathrm{v}'' + \mathrm{v}''' + \dots$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' + \rho'' + \rho''' + \dots$$

Задаваясь параметром малости задачи (число Рейнольдса, Маха и пр.) уравнения гидродинамики представляют для каждого уровня приближения в виде неоднородного волнового уравнения с известной из решения на предыдущем шаге правой частью. Так Образуется система зацепляющихся волновых уравнений, которые обрывают по достижении необходимой точности решения.

Например, если начать со второго приближения (1-ое приближений соответствует известным результатам линейной акустики), то имеем

$$\frac{\partial^2 p''}{\partial t^2} - c_2^2 \nabla^2 p'' = \varepsilon_2 f_2(p', \mathbf{r}, t)$$

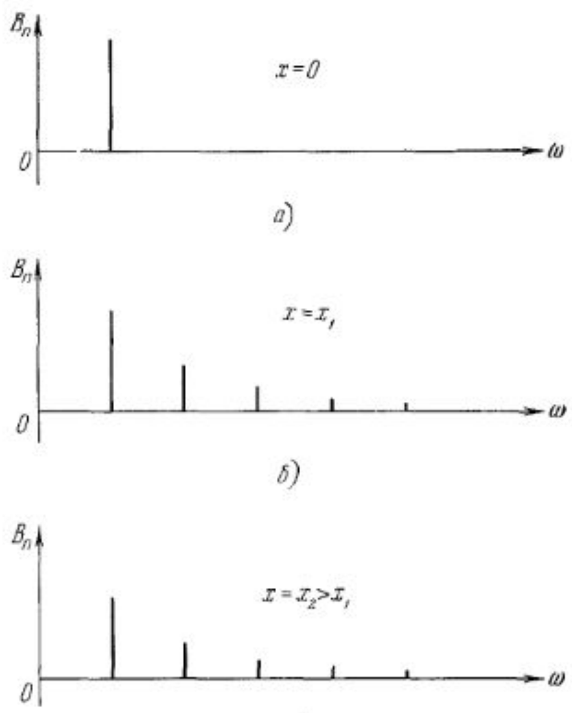
$$\frac{\partial^2 p'''}{\partial t^2} - c_3^2 \nabla^2 p''' = \varepsilon_3 f_3(p'', \mathbf{r}, t)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 p^{(N)}}{\partial t^2} - c_N^2 \nabla^2 p^{(N)} = \varepsilon_N f_N(p^{(N-1)}, \mathbf{r}, t)$$

где ε_i - показатели, порядок малости которых соответствует малости определяемой из уравнения поправки к решению

Как правило, для гармонических волн линейного приближения последующие приближения получаются в гармоник кратных частот. Основной вклад за счет нелинейных эффектов принадлежит, поэтому, волне второй гармоники (имеет удвоенную частоту по сравнению с частотой основной линейной части решения)



Искажение формы профиля волны вследствие нелинейных эффектов сопровождается изменением спектра гармоник

Следствием нелинейности является способность волн взаимодействовать между собой (рассеяние звука на звуке)

2. Общие сведения

1) **Солитон как особый класс нелинейных волн**

Решение Римана – точное решение нелинейного уравнения (действует только нелинейность) выводу: нелинейная волна этого типа распространяется с изменением волнового профиля т.е.не обладает *структурной устойчивостью*.

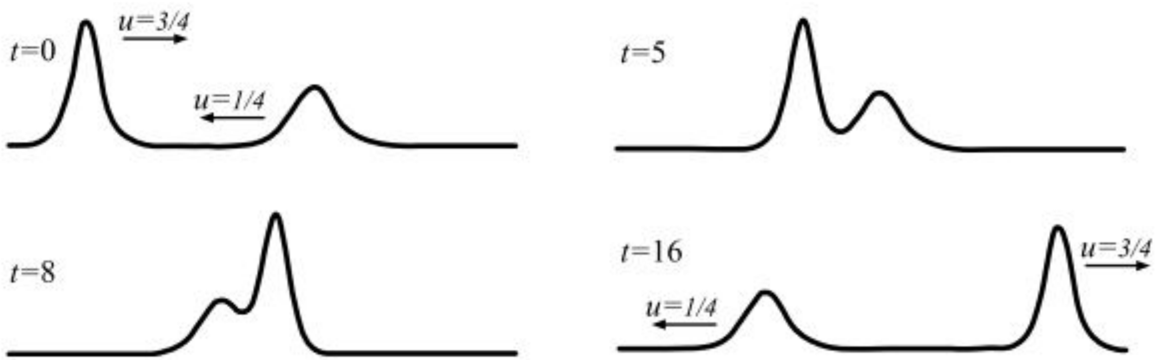
В реальных условиях действует не только нелинейность. Включаются дополнительно такие факторы, как диссипация энергии и дисперсия.

Сильная диссипация всегда к разрушению волны через ослабление. Можно ожидать, что при слабой диссипации сочетание дисперсии с нелинейностью позволит обеспечить высокую структурную устойчивость нелинейной волны.

Именно этот класс нелинейных волн, способных распространяться без изменения волнового профиля, форма которого отлична от гармонической, получил название *солитонов* – уединенных волн.

2) **Классические признаки солитона**

- распространение без изменения профиля
- постоянство скорости распространения
- отсутствие изменений при встрече (взаимодействии) с другим солитоном



Условность признаков: считать ли волну солитоном, если она периодически меняет свою форму (в целом оставаясь структурно устойчивой не в статическом, а динамическом смысле)?

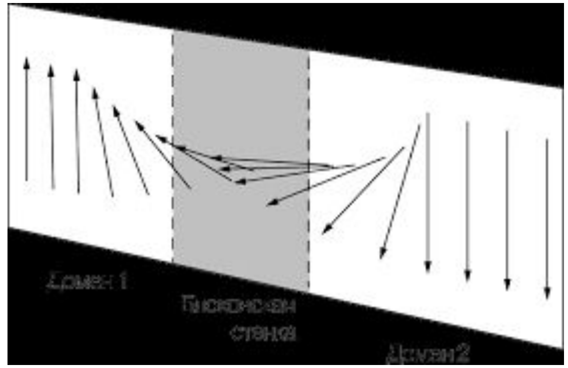
3) **Первые наблюдения солитона**

приписываются англичанину С. Расселу (1834 г.), описавшему возникновение в узком канале из-за резкого торможения баржи возмущения поверхности воды выпуклой формы, распространяющегося с постоянной скоростью на большое расстояние.

В природе также известны волны явно солитонного типа или близкие к ним – ударные волны в атмосфере при взрывах и грозовых разрядах, приливные волны в устьях рек, впадающих в море и пр.

По размерности пространства, в котором существуют солитоны, различают: одно-, двух- и трехмерные солитоны. К одномерным солитонам относятся волны в каналах (солитоны Рассела), цунами, доменные границы в
в магнетиках, оптические солитоны в световодах.

Цунами: слева – вид со спутника


Домен 1
стенка
Домен 2

Двухмерными солитонами являются дислокации кристаллической решетки, вихри Абрикосова в сверхпроводиках 2-го рода, антициклоны, в частности красное пятно Юпитера.
Трех- и многомерными солитонами являются модели в астрофизике и физике элементарных частиц.

3. Уравнение Кортевега – де Вриза

1) **Исходные посылки**

Линейная среда → Слабая нелинейная среда с дисперсией

Обычное волновое ур-е

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\Phi = 0$$

В какой форме взять добавок на дисперсию?

$$\omega^2 = k^2c^2 \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = k^2c^2 + \ldots$$

2) **Соображения по поводу выбора добавка:**

• для механических волн обычно скорость сигнала меньше фазовой скорости $\Rightarrow$ добавок нужно брать со знаком «−»

• чтобы сохранить «отрицательность» добавляемого члена его нужно брать с четной степенью по *k* т.к. иначе с обращением волны ($k \to -k$) менялся бы характер дисперсии

$\omega^2 = k^2c^2 - \beta^2 k^4$ или, полагая поправку малой получим

$$\omega = kc\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{c^2}k^2} \cong kc - \frac{\beta^2}{2c}k^3$$

При таком приближенном способе учета дисперсии добавок оказывается с нечетной степенью по *k*. *Имеем право рассматривать только прямые волны!*

Для наблюдения за волной выберем движущуюся со скоростью *c* систему координат и перенормируем длину так, чтобы избавиться от коэффициента $\beta^2/(2c)$

3) **Реконструкция дифференциального уравнения**

Новый закон дисперсии

$$\omega - kc \rightarrow \boxed{\omega = -k^3}$$

Такую связь ω с *k* дает уравнение вида $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0}$

Недостатки: 1) ур-е не инвариантно к преобразованию Галилея; 2) не подходит на роль уравнения, имеющего решением солитон – дает решение с расплывающимися (из-за дисперсии) начальными импульсами *u*(x,0)

Первый член уравнения требует замену $\frac{\partial u}{\partial t} \to \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}}_{du/dt}$

по той причине, что уславливаясь рассматривать волну в системе, движущейся со скоростью *c* мы фактически перешли на язык Лагранжа (роль частицы играет волна)

Итог

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0}$$

- имеем простейшую форму уравнения Кортевега – де Вриза(1895)

Основание считать, что решение его будет солитонным в следующем: заменяя частную производную $\partial u/\partial t$ на полную конвективную производную мы, по сути, добавили к дисперсионному члену член, выражающий геометрическую нелинейность. Этим самым, открылась возможность для компенсации дисперсионного расплывания импульса противоположным действием нелинейности.

4. Солитонное решение уравнения Кортевега – де Вриза

Решение ур-ия $\dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$ ищем в виде

$$u = u(\xi)\,, \quad \xi = x - Vt\,, \quad V = const$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Vu'\,, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = u' \Rightarrow \boxed{u''' + \left(\frac{u^2}{2} - Vu\right)' = 0}$$

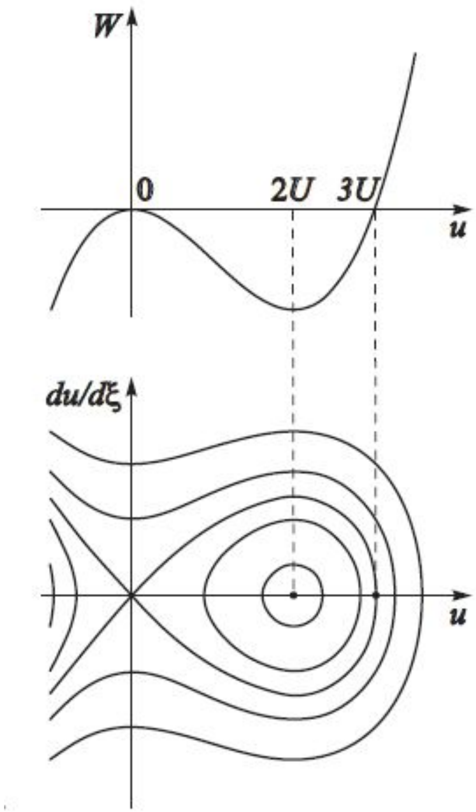
$$u'' + \left(\frac{u^2}{2} - Vu\right) = C$$

Полагая C=0 получаем ОДУ со структурой нелинейного, консервативного осциллятора

$$\boxed{u'' + \left(\frac{u^2}{2} - Vu\right) = 0}$$

Потенциальная энергия этого осциллятора $W(u) = -\frac{1}{2}\left(Vu^2 - \frac{u^3}{3}\right)$

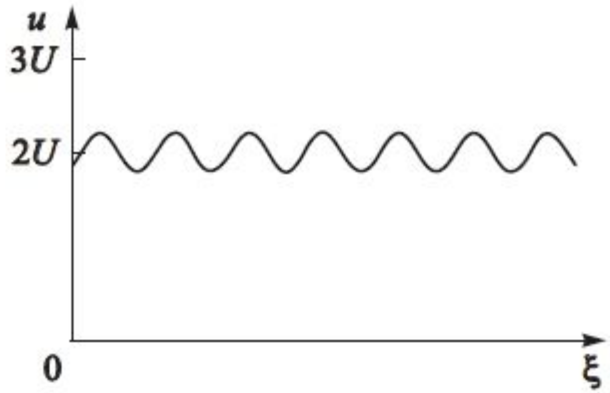
Качественную картину решения можно получить методом фазовой плоскости



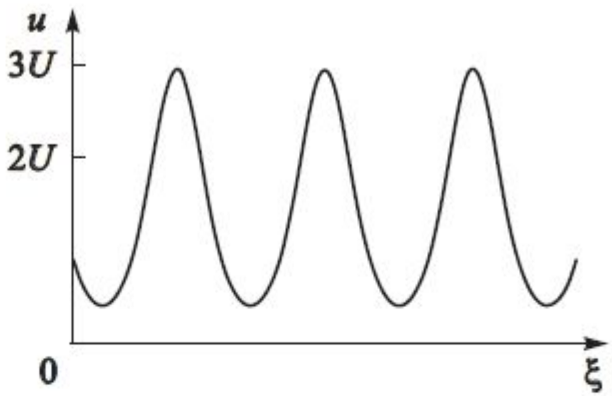
Имеется седло (начало фазовой плоскости) и точка устойчивого равновесия u=2V .

Вокруг этой точки фазовые траектории замкнуты $\Longrightarrow$ движение по ним является квазигармоническим

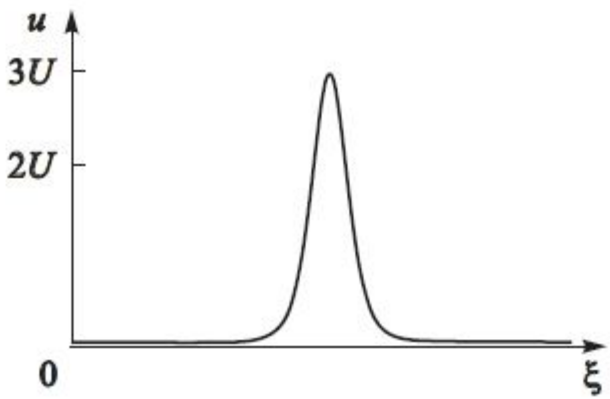
Через седловую точку проходит сепаратриса Которая отделяет область осцилляторного режима от солитонных движений



Квазилинейные осцилляции



Кноидальные колебания



Солитон (движение по сепаратрисе

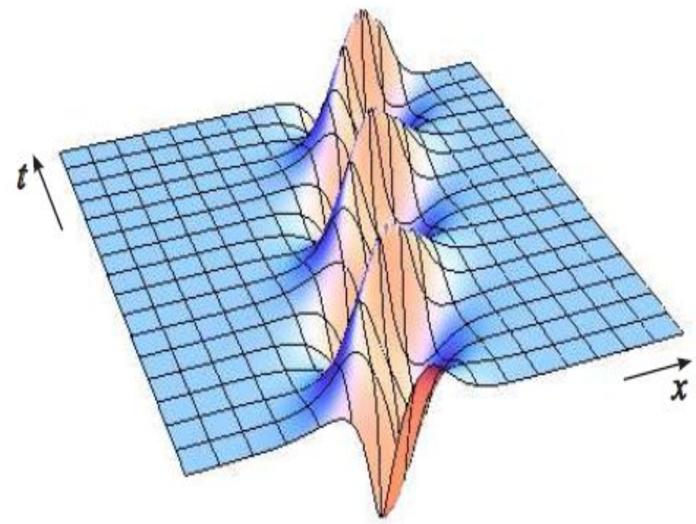
Аналитическое решение для солитона (можно убедиться прямой подстановкой)

$$\boxed{u = 3V \operatorname{sech}^2\left[\frac{\sqrt{V}}{2}(x - Vt)\right]}$$

5. Другие типы солитонов

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

модифицированное уравнение КдВ имеет многосолитонное бризерное решение



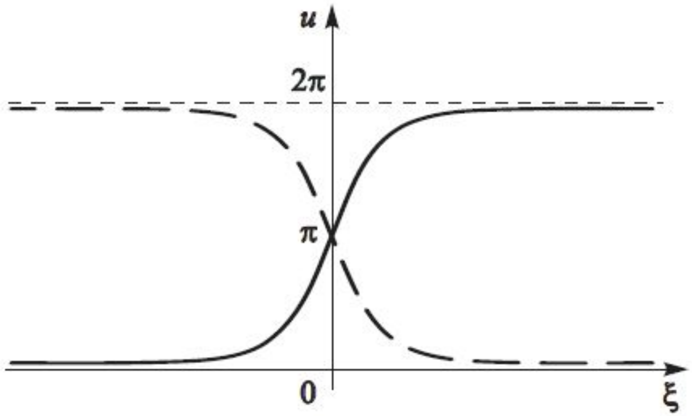
Уравнение синус-Гордона $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \omega_0^2 \sin u = 0$$

Имеет аналитическое решение вида

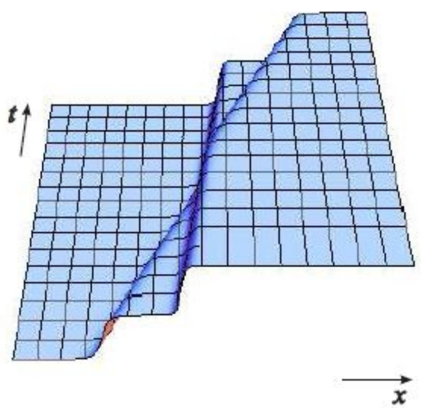
$$u = 4\,\mathrm{arctg}\left(\exp\left(\pm\frac{\omega_0 \gamma}{c}\xi\right)\right),$$

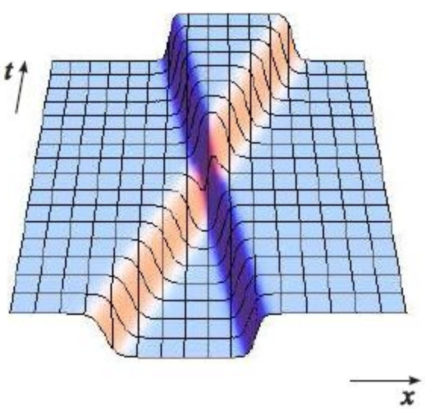
$$\xi = x - Vt\,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

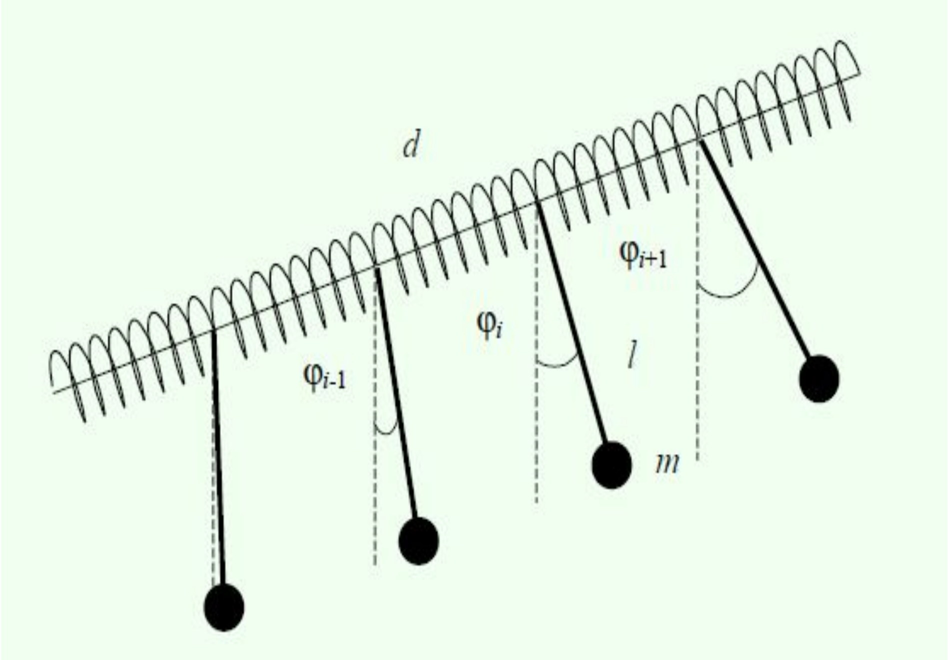
кинк/антикинк (англ. петля)



Столкновение 2-х кинков и кинка с антикинком







Механическая модель

Нелинейное уравнение Шредингера

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial \phi}{\partial t} + k\,|\phi|^2\,\phi = 0}$$

Приложения:

- стационарная самофокусировка плоских волн
- одномерная автомодуляция монохроматических волн
- распространение термоимпульсов в твердом теле
- волоконная оптика, сверхпроводимость

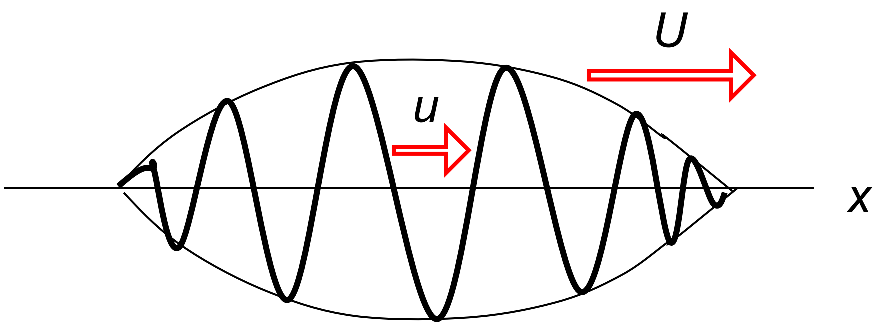
Аналитическое решение

$$\boxed{\phi = \Phi_0\,\mathrm{sch}[\Phi_0\sqrt{k/2}(x - Ut)]\cdot\exp[i(U/2)(x - ut)]}$$

$U > 2u$

U – скорость огибающей импульса

u – скорость несущей


U
u
x