

14.3. РЯД МАКЛОРЕНА

Предположим, что функция $y=f(x)$ определена и n раз дифференцируема в окрестности точки $x=0$, и может быть представлена в виде суммы степенного ряда, т.е. может быть разложена в степенной ряд:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + \dots + C_n \cdot x^n + \dots$$

Выразим коэффициенты ряда через $f(x)$. Найдем производные функции $f(x)$, почленно дифференцируя n раз:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \dots + nC_nx^{n-1} + \dots$$

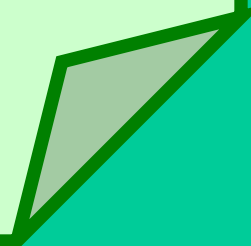
$$f''(x) = 2C_2 + 2 \cdot 3C_3x + 4 \cdot 3C_4x^2 + \dots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3C_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2C_4x + \dots + n(n-1)(n-2)C_nx^{n-3} + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot C_n + \dots$$

Если в полученных выражениях положить $x=0$, то получим:



$$f(0) = C_0$$

$$f'(0) = C_1$$

$$f''(0) = 2C_2 = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = 2!C_2$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3C_3 = 3!C_3$$

.....

$$f^{(n)}(0) = n!C_n$$

Отсюда находим коэффициенты ряда:

$$C_0 = f(0)$$

$$C_1 = f'(0)$$

$$C_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$

$$C_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

.....

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Подставляем найденные коэффициенты в разложение функции в ряд:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 +$$
$$+ \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Ряд Маклорена

Так же, как и для числовых рядов, сумму $f(x)$ ряда Маклорена можно представить в виде

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где $S_n(x)$ - n -ая частичная сумма ряда;

$r_n(x)$ - n -ый остаток ряда.

Теорема

Для того, чтобы ряд Маклорена сходиллся к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы при $n \rightarrow \infty$ остаток ряда стремился к нулю, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

для всех x из области сходимости ряда.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ разложима в ряд Маклорена, то это разложение единственно.

Замечание

Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора при $x_0=0$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + \dots$$

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора связан с формулой Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \\ + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_n(x)$$

*Формула
Тейлора*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

*остаточный член
формулы Тейлора*

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$$

То остаток ряда Тейлора равен остаточному члену формулы Тейлора:

$$r_n(x) = R_n(x)$$

