14.3. РЯД МАКЛОРЕНА

Предположим, что функция *y=f(x)* определена и *n* раз дифференцируема в окрестности точки *x=0*, и может быть представлена в виде суммы степенного ряда, т.е. может быть разложена в степенной ряд:

$$f(x) = C_0 + C_1 \cdot x + C_2 \cdot x^2 + ... + C_n \cdot x^n + ...$$

Выразим коэффициенты ряда через *f(x)*. Найдем производные функции *f(x)*, почленно дифференцируя *n* раз:

$$f'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + 4C_4x^3 + \ldots + nC_nx^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3x + 4\cdot 3C_4x^2 + \ldots + n(n-1)C_nx^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 2\cdot 3C_3 + 4\cdot 3\cdot 2C_4x + \ldots + n(n-1)(n-2)C_nx^{n-3} + \ldots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot C_n + \ldots$$

Если в полученных выражениях положить *x=0*, то получим:

$$f(0) = C_0$$

$$f'(0) = C_1$$

$$f''(0) = 2C_2 = 2 \cdot 1 \cdot C_2 = 2!C_2$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 3C_3 = 3!C_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(0) = n!C_n$$

Отсюда находим коэффициенты ряда:

$$C_0 = f(0) \qquad C_1 = f'(0)$$

$$C_2 = \frac{f''(0)}{2!} \qquad C_3 = \frac{f'''(0)}{3!}$$

$$\cdots\cdots$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Подставляем найденные коэффициенты в разложение функции в ряд:

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

Ряд Маклорена

Так же, как и для числовых рядов, сумму *f(x)* ряда Маклорена можно представить в виде

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x)$$

где $S_n(x)$ **- *n*–ая частичная сумма ряда;**

$r_n(x)$ **- *n*–ый остаток ряда.**

Теорема

Для того, чтобы ряд Маклорена сходился к функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы при $n \to \infty$ ***остаток ряда стремился к нулю, т.е.***

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

для всех x из области сходимости ряда.

Можно доказать, что если функция *f(x)* разложима в ряд Маклорена, то это разложение единственно.

Замечание

Ряд Маклорена является частным случаем ряда Тейлора при $x_0=0$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'''(0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + ...$$

Ряд Тейлора

Ряд Тейлора связан с формулой Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 +$$

$$+\frac{f'''(0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot(x - x_0)^n + R_n(x)$$

Формула Тейлора

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

остаточный член формулы Тейлора

Если

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

То остаток ряда Тейлора равен остаточному члену формулы Тейлора:

$$r_n(x) = R_n(x)$$