

Натуральное число как мера величины

Понятие положительной скалярной величины и ее измерения

- *Величины одного рода или однородные величины* - это величины, которые выражают одно и тоже свойство объектов.
- ✓ *Пример:* длина стола, длина комнаты- это величины одного рода.

Основные положения:

1) Любые две величины **сравнимы**: они либо равны, либо одна меньше другой. Имеют место отношения "равно", "меньше" и "больше", и для любых величин А и В справедливо одно и только одно из отношений: $A < B, A = B, A > B$.

✓ *Пример:* масса яблока меньше массы арбуза.

2) Отношение "меньше" для однородных величин **транзитивно**: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

✓ *Пример:* если масса яблока М1 меньше массы яблока М2, и масса яблока М2 меньше массы яблока М3, то масса яблока М1 меньше массы яблока М3.

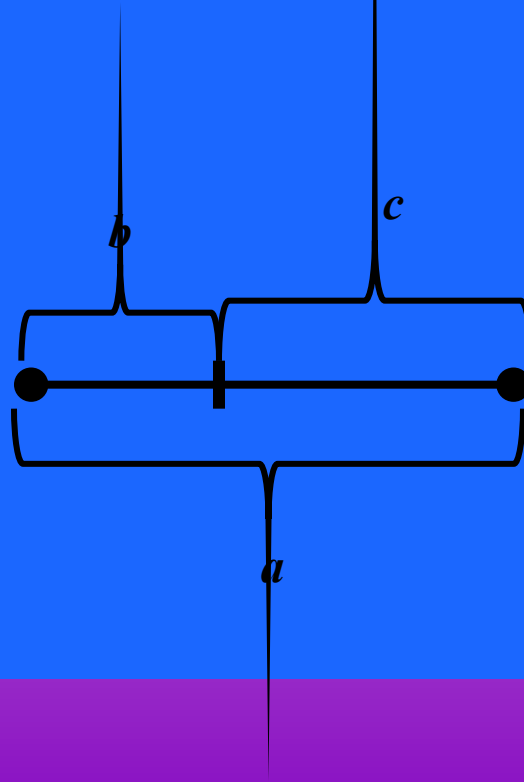
3) **Величины одного рода можно складывать**, в результате сложения получается величина того же рода: $C = A + B$, С-сумма величин А и В.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно.

✓ *Пример:* если А-масса арбуза, В-масса яблока, то $C = A + B$ - это масса арбуза и яблока.

4) **Величины одного рода можно вычитать**, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение. Разностью величин A и B называется такая величина $C=A-B$, что $A=B+C$. Разность величин A и B существует, если $A>B$.

✓ *Пример:* если A -длина отрезка a , B -длина отрезка b , то $C=A-B$ -это длина отрезка c .

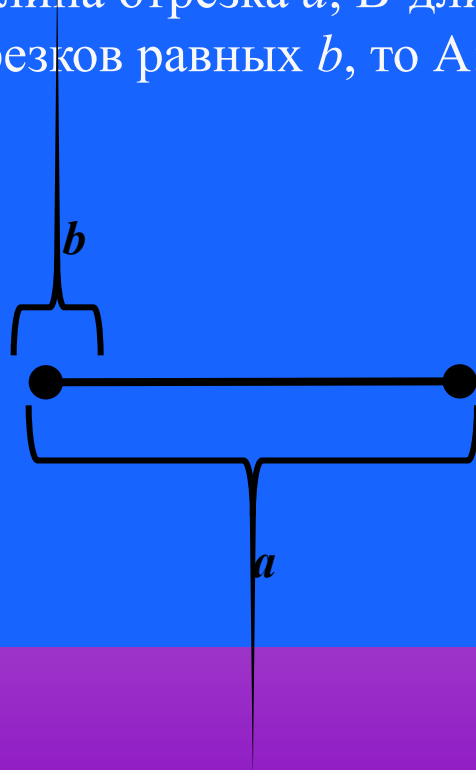


5) **Величину можно умножать на положительное действительное число**, в результате получают величину того же рода. Для любой величины A и любого положительного числа x существует единственная величина **$V = x \times A$** , V - произведение величины A на число x .

✓ *Пример:* если A -масса одного яблока, то умножив A на число $x=3$, получим величину $V=3 \times A$ - массу трех яблок.

6) **Величины одного рода можно делить**, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число. Частным величин A и B называется такое положительное действительное число $x = A:B$, что $A = x \times B$.

✓ *Пример:* если A -длина отрезка a , B -длина отрезка b и отрезок A состоит из 4-х отрезков равных b , то $A:B=4$, т.к. $A = 4 \times B$.

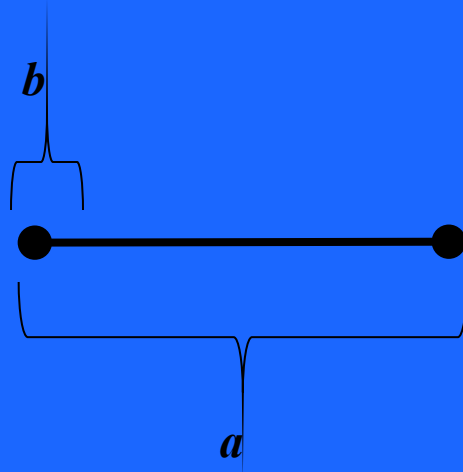


Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью- их можно оценивать количественно.

- Выбирают величину, которую называют единицей измерения-**Е**.
- Если задана величина A и выбрана единица величины E , то **измерить величину A -это значит найти такое положительное действительное число x , что $A = x \cdot E$.**
- Число **x - численное значение величины A** при единице величины E . Оно показывает, во сколько раз величина A больше(меньше) величины E , принятой за единицу измерения.

- Если $A = x \times E$, то число x называют мерой величины A при единице E и пишут $x = m_E(A)$

✓ *Пример:* A -длина отрезка a , E -длина отрезка b , то $A=4 \times E$. число 4-это мера длины A при единице длины E .



- Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной*.
- *Положительная скалярная величина* - скалярная величина, которая при выбранной единице измерения принимает только положительные численные значения.
- ✓ *Пример:* площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.
- Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода* или *разнородными величинами*.
- ✓ *Пример:* длина и масса-это разнородные величины.

Упражнения

В ТЕОРИЮ

1. О каких величинах идет речь в следующих предложениях:

- a) Персики дороже яблок.
- b) Шкаф тяжелее стула.
- c) Катя выше Гали.

Проверить себя

Далее

Ответ:

Положительная скалярная величина.

- а) Персики дороже яблок- *стоимость*.
- б) Шкаф тяжелее стула- *масса*.
- в) Катя выше Гали- *длина*.



2. Какие величины можно сравнить между собой:

- а) 1200 м;
- б) 20 штук
- в) 320 кг
- г) 12 мин

- 1) 2 ц
- 2) 2км 400м
- 3) 20 пар
- 4) 1 час

Проверить себя

Далее

Ответ:

- а) 1200 м;
- б) 20 штук
- в) 320 кг
- г) 12 мин

- 1) 2 км 400 м
- 2) 20 пар
- 3) 2 ц
- 4) 1 час



3. Назовите объект, его величину, численное значение и единицу измерения величины:

- а) В сумке 5 кг. апельсинов.
- б) Глубина бассейна 2 м.
- в) Площадь участка 8 соток.
- г) Рост мальчика 1 м 70 см.

Проверить себя

Далее

Ответ:

- а) объект- апельсины, величина -масса, число 5-
численное значение, единица измерения- килограмм;
- б) объект -глубина бассейна, величина-длина, число 2-
численное значение, единица измерения- метр;
- в) объект -участок, величина - площадь, число 8-
численное значение, единица измерения- сотка;
- г) объект -рост мальчика, величина - длина, число 1м 70
см -численное значение, единица измерения м и см.



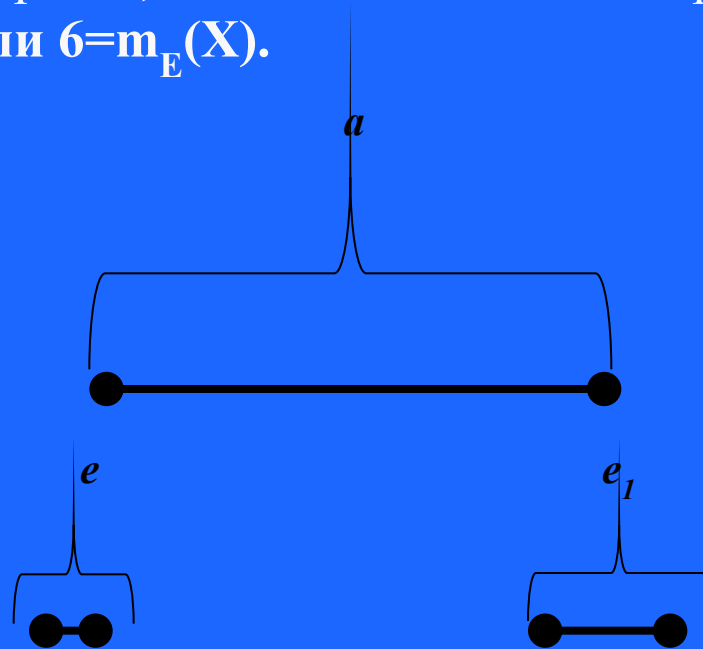
Смысл натурального числа, полученного в результате измерения величины.
Смысл суммы и разности

Понятие: "отрезок состоит из отрезков".

- *Определение. Считают, что отрезок x состоит из отрезков x_1, x_2, \dots, x_n , если он является их объединением и никакие два из них не имеют общих внутренних точек, хотя и могут иметь общие концы: отрезок x разбит на отрезки x_1, x_2, \dots, x_n и пишут $x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$*
- *Пусть задан отрезок x , его длина обозначим X , e - единичный отрезок, E -длина отрезка.*

- Определение. Если отрезок x состоит из отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку e , то число a называют численным значением длины X данного отрезка при единице длины E .

✓ Пример: x - отрезок, состоит из 6 отрезков, равных отрезку e - единичный отрезок; E -длина единичного отрезка; X -длина отрезка x , то $X=6E$ или $6=m_E(X)$.



- Из определения получаем, что **НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО** как результат измерения длины отрезка (или мера длины отрезка), показывает, из скольких единичных отрезков состоит отрезок, длина которого измеряется.

Замечания:

1. При переходе к другой единице длины численное значение длины отрезка изменяется, хотя сам отрезок остается неизменным.
✓ *Пример:* если в качестве единицы длины выбрать e_1 , то мера длины отрезка $x=3$. Записывается: $X=3 \times E_1$ или $m_{E_1}(X)=3$.
2. Если отрезок x состоит из a отрезков, равных e , а отрезок e состоит из b отрезков, равных e , то $a=b$, тогда и только тогда, когда отрезки $x=y$.
✓ *Пример:* В записи 3 см^2 число **3** означает, что фигура F состоит из трех единичных квадратов с площадью равной квадратному сантиметру.

Смысл суммы натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

- Теорема. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длины отрезков y и z выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка x равна сумме мер длин его частей.

Сумму натуральных чисел a и b можно рассматривать как меру длины отрезка x , состоящего из отрезков y и z , мерами длин которых являются числа a и b .

$$a+b=m_E(Y)+m_E(Z)=m_E(Y+Z)=m_E(X)$$

Смысл разности натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

- Теорема. Если отрезок x состоит из отрезков y и z и длина отрезков x и y выражаются натуральными числами, то мера длины отрезка z равна разности мер длин отрезков x и y .

Разность натуральных чисел a и b можно рассматривать как меру длины такого отрезка $z=x-y$, что $z+y=x$, если мера длины отрезка x равна a , мера отрезка y равна b .

$$a-b=m_E(X) - m_E(Y) = m_E(X-Y) = m_E(Z)$$

Упражнения

В ТЕОРИЮ

1. Какой смысл имеет натуральное число 5, если оно получается в результате:

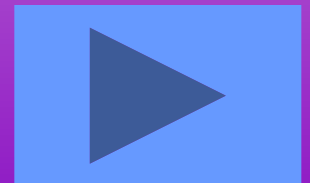
- а) Длины отрезка;
- б) Площади фигуры;
- в) Массы тела?

Проверить себя

Далее

Ответ:

- а) мера длины отрезка;*
- б) фигура состоит из 5 единичных квадратов;*
- в) численное значение массы.*



2. Объясните, почему следующая задача решается при помощи сложения:

- Когда со стола взяли 3 книги, то на нем осталась 1 книга.
Сколько книг лежало на столе первоначально?

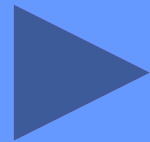
Проверить себя

Далее

Ответ:

В задаче идет речь о количестве книг. Известно их численное значение. Требуется найти численное значение количества книг, которое получится, если данные книги сложить.

Получаем выражение $3+1$. Это математическая модель данной задачи. Вычислив значение выражения $3+1$, получим ответ на вопрос задачи.



3. Объясните, почему следующая задача решается при помощи вычитания:

- С двух участков собрали 8 пучков укропа. Сколько пучков укропа собрали с первого участка, если со второго участка собрали 5 пучков?

Проверить себя

Далее

Ответ:

В задаче рассматривается количество пучков укропа, известно их численное значение. Это количество складывается из количества пучков укропа, собранных с первого и второго участков, численное значение которого также известно. Требуется узнать численное значение пучков укропа, собранных с первого участка.

Так как количество пучков укропа собранных с первого участка можно получить, вычитая из общего количества пучков укропа, собранных с двух участков количество собранных пучков со второго участка, то численное значение пучков укропа, собранных с первого участка находят действием вычитания:

8-5.

Вычислив значение этого выражения, получим ответ на вопрос задачи.



4. Обоснуйте выбор действия при решении задачи:

- *Купили 3 кг яблок, а апельсинов на 2 кг больше. Сколько килограммов апельсинов купили?*

Проверить себя

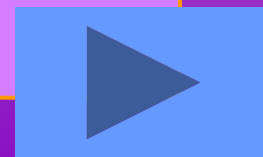
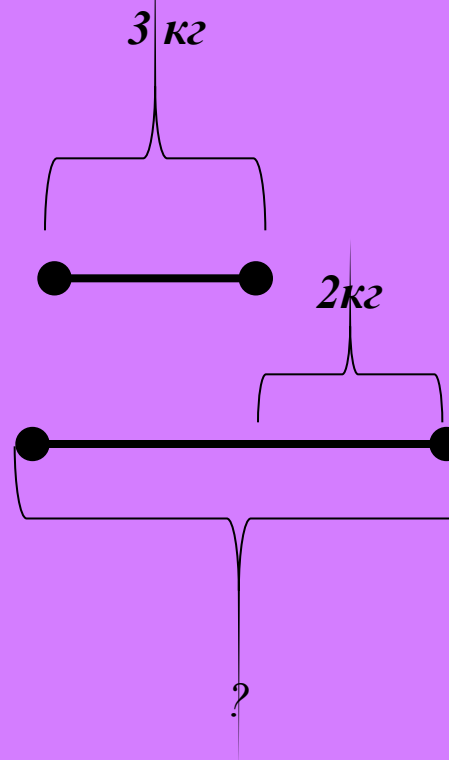
Далее

Ответ:

В задаче идет речь о двух величинах- массе яблок и массе апельсинов. Численное значение первой массы известно, а численное значение второй массы надо найти, зная, что апельсинов на 2 кг больше, чем яблок.

Видно, что **апельсинов купили столько же, сколько яблок, и еще 2 кг, т.е масса апельсинов складывается из двух масс яблок(3кг и 2кг),** и чтобы найти ее численное значение, надо **сложить численные значения масс-слагаемых.** Получаем выражение $3+2$, значение которого и будет ответом на вопрос задачи.

Модель задачи:



Смысл произведения и частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин

- **Умножение и деление натуральных чисел- мер величин связано с переходом от одной единицы величины к другой в процессе измерения одной и той же величины.**

*Смысл произведения натуральных чисел,
полученных в результате измерения величин.*

- Теорема.** Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E , а отрезок длины E состоит из b отрезков, длина которых равна E_1 , то мера длины отрезка x при единице длины E_2 равна $a \times b$.

*Если натуральное число a - мера длины отрезка
 x
при единице длины E ,
натуральное число b - мера длины E
при единице длины E_1 ,
то произведение $a \times b$ - это мера длины отрезка
 x
при единице длины E_1 .*

$$a \times b = m_E(x) \times m_{E_1}(E) = m_{E_1}(x)$$

Смысл частного натуральных чисел, полученных в результате измерения величин.

- Теорема.** Если отрезок x состоит из a отрезков, длина которых равна E , отрезок длины E_1 состоит из b отрезков длины E , то мера длины отрезка x при единице длины E_1 равна $a:b$.

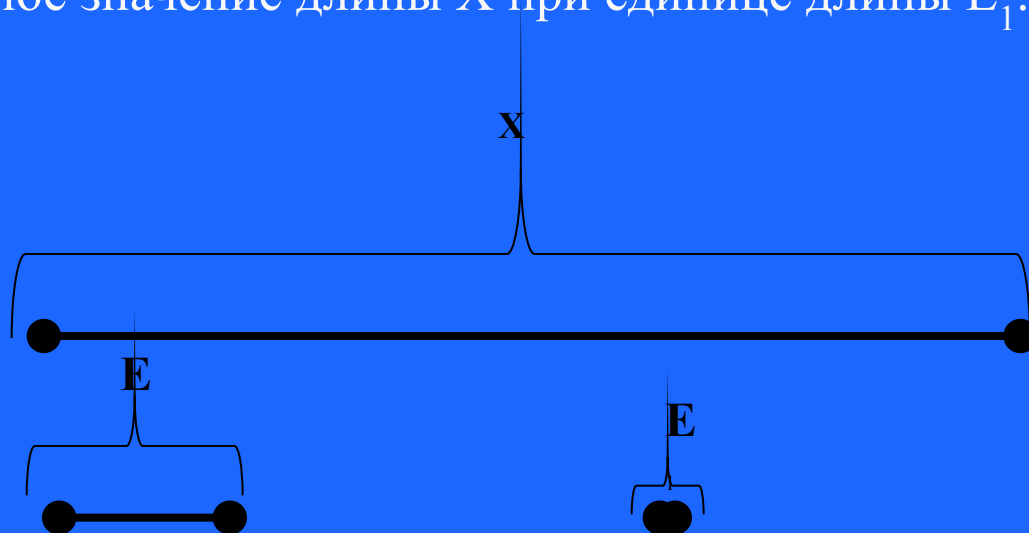
Если натуральное число a - мера длины отрезка x при единице длины E , натуральное число b - мера новой единицы длины E_1 при единице длины E , то частное $a:b$ - это мера длины отрезка x при единице длины E_1 .

$$a:b = m_E(x) : m_E(E_1) = m_{E_1}(x)$$

Задачи.

1. Объяснить смысл произведения 3×4 , если 4 и 3-числа полученные в результате измерения величин.

- ✓ *Решение.* Пусть $4 = m_E(X)$, $3 = m_{E_1}(E)$, где X - измеряемая величина, E - первоначальная единица величины, а E_1 - новая единица величины. Тогда согласно теореме, $4 \times 3 = m_{E_1}(X)$, т.е. 4×3 - это численное значение длины X при единице длины E_1 .



2. Обосновать выбор действия при решении задачи.

В одной коробке 6 ручек. Сколько ручек в трех таких коробках?

✓ *Решение.* В задаче идет речь о количестве ручек, которое сначала измерено коробками и известно численное значение этой величины при указанной единице. Требуется найти численное значение этой же величины при новой единице - ручка, причем известно, что коробка – это 6 ручек.

Тогда $3\text{кор.} = 3 \times \text{кор.} = 3 \times (6 \text{ руч.}) = 3 \times (6 \times \text{руч.}) = (3 \times 6)\text{руч.}$

Таким образом, задача решается при помощи действия умножения, поскольку в ней при измерении осуществляется переход от одной единицы величины (коробка) к другой - ручка.

3. Обосновать выбор действия при решении задачи.

Из 12 м ткани сшили платья, расходуя на каждое по 4 м. Сколько платьев сшили?

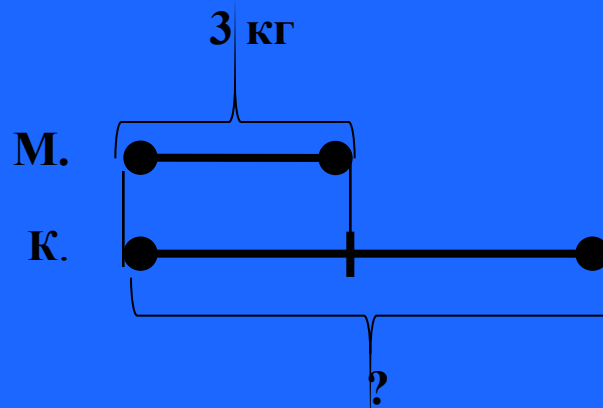
✓ *Решение:* В задаче рассматривается длина ткани, которая измерена сначала при помощи единицы длины метр, и известно численное значение заданной величины. Требуется найти численное значение той же длины при условии, что она измеряется новой единицей – платьем, причем известно, что платье-это 4м,откуда метр-это $1/4$ платья:

$$12\text{м}=12 \times \text{м}=12 \times (1/4 \text{ пл.})=(12 \times 1/4)\text{пл.}=(12:4)\text{пл.}=3\text{пл.}$$

4. Обосновать выбор действия при решении задачи.

Купили 3 кг моркови, а картофеля в 2 раза больше. Сколько килограммов картофеля купили?

✓ *Решение:* В задаче рассматривается масса моркови и масса картофеля, причем численное значение первой массы известно, а численное значение второй надо найти, зная, что она в 2 раза больше первой. Масса картофеля складывается из двух масс по 3 кг, численное значение массы картофеля можно найти, умножив 3 на 2. Найдя значение выражения 3×2 , получим ответ на вопрос задачи.



Упражнения

В ТЕОРИЮ

Обоснуйте выбор действия при решении задач:

- 1) 6 кг муки надо разложить в пакеты, по 2 кг в каждый. Сколько получится пакетов?
- 2) Купили 3 пакета муки, по 2 кг в каждом. Сколько килограммов муки купили?
- 3) 6 кг муки разложили на пакеты по 2 кг в каждый. Сколько получилось пакетов?

*Ответ на
задачу №1*

*Ответ на
задачу №2*

*Ответ на
задачу №3*

ЗАКОНЧИТЬ

Ответ №1

В задаче рассматривается масса муки, которая сначала измерена единицы массы – килограмм, и известно численное значение этой массы при указанной единицы массы.

Требуется найти результат измерения этой же массы, но уже при помощи другой единицы- пакета, причем известно, что **1 пакет- это 2 кг.**

Рассуждения, связанные с поиском численного значения массы муки при новой единице- пакет, можно представить в таком виде:

$$6\text{кг}=6 \times \text{кг}=6 \times (1/2 \text{ пак.})=(6 \times 1/2)\text{пак.}=(6:2)\text{пак.}$$

[Вернуться к задачам](#)

Ответ №2

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо массу 2 кг повторить слагаемым три раза, т.е. массу 2 кг умножить на число 3.

Численное значение полученной при этом величины находим, умножив численное значение массы муки в одном пакете на число 3.

Произведение 3×2 будет математической моделью данной задачи.

Вычислив его значение, будем иметь ответ на вопрос задачи.

[Вернуться к задачам](#)

Ответ №3

В задаче надо узнать, сколько раз масса 2 кг укладывается в 6 кг, т.е. надо массу 6 кг разделить на массу 2 кг. В результате должно получиться число, которое находим разделив численное значение одной величины на численное значение другой.

Таким образом, получаем частное **6:2**. Его значение и будет ответом на вопрос задачи.

ЗАКОНЧИТЬ