

Дифференциальные уравнения высших порядков.

1 Дифференциальные уравнения 2-го порядка.

- **Определение.** Уравнения вида $F(x, y, y', y'') = 0$ называются дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

- Дифференциальное уравнение, разрешенное относительно второй производной y'' имеет вид

$$y'' = f(x, y, y').$$

- **Пример.** $y'' = x$. Последовательно интегрируя, получим

$$y' = \int x dx + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Лемма.

- Дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y')$$

обычно имеет бесчисленное множество решений, определяемых формулой $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, содержащей две произвольные постоянные.

Это множество решений называется общим решением.

Частные решения дифференциального уравнения определяются из начальных условий

$$y|_{x=x_0} = y_0, \quad y'|_{x=x_0} = y'_0.$$

Пример.

$$y'' = x. \quad y|_{x=2} = 2, \quad y'|_{x=2} = 3.$$

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

$$\begin{cases} 3 = 2 + C_1, \\ 2 = \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

$$C_1 = 1, \quad C_2 = -\frac{4}{3}.$$

$$y = \frac{x^3}{6} + x - \frac{4}{3}.$$

- **Геометрический смысл начальных условий:**
- Помимо точки (x_0, y_0) , задаем угловой коэффициент касательной.

Теорема о существовании и единственности решения.

- Если функция $f(x, y, y')$ и ее производные $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ непрерывны в окрестности значений (x_0, y_0, y'_0) , то дифференциальное уравнение $y'' = f(x, y, y')$ в достаточно малом интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ имеет единственное решение $y = y(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$.
- Без доказательства.

Из теоремы следует, что уравнение $y'' = \frac{y'}{x} + y$ при заданных начальных условиях $y|_{x=1} = 2, y'|_{x=1} = -1$ имеет единственное решение. Если задать начальные условия при $x_0 = 0$, то теорема о существовании дать ответ не может, т.к. при $x_0 = 0$ правая часть имеет особенность.

- Для дифференциального уравнения 2-го порядка часто задают граничные условия (краевые условия)

$$y|_{x=x_1} = y_1, y|_{x=x_2} = y_2$$

(сопромат (изгиб балки), математическая физика и т.д.).

В этом случае может быть одно решение, может решение не существовать и может быть бесконечное множество решений.

Это коренное отличие задания граничных условий от задания начальных условий.

Пример. $y'' = x. \quad y|_{x=1} = 0, \quad y|_{x=2} = 0.$

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2,$$

$$\frac{1}{6} + C_1 + C_2 = 0, \quad \frac{4}{3} + 2C_1 + C_2 = 0.$$

$$C_1 = -\frac{7}{6}, \quad C_2 = 1. \quad y = \frac{x^3}{6} - \frac{7}{6}x + 1.$$

2. Частные случаи дифференциальных уравнений **2**-го порядка $f(x, y, y')$.

- 1) Правая часть не содержит y и y' .

$$y'' = f(x).$$

интегрируем дважды

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

$$y = \int \left[\int f(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2.$$

2) Правая часть не содержит

y .

$$y'' = f(x, y').$$

- Замена $y' = z \Rightarrow y'' = z'$.

$$z' = f(x, z).$$

- Это дифференциальное уравнение 1-го порядка.

$$z = \varphi(x, C_1), \quad y' = z, \quad y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

- **Пример.**

$$y'' + \frac{y'}{x} = x, \quad y' = z,$$

$$z' + \frac{z}{x} = x, \quad z = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}.$$

$$y' = \frac{x^2}{3} + \frac{C_1}{x}, \quad y = \frac{x^3}{9} + C_1 \ln|x| + C_2.$$

3) Правая часть не содержит x .

$$y'' = f(y, y').$$

Введем замену

$$y' = p(x) \Rightarrow y'' = p'(x)$$

Таким образом $p' = f(x, p)$ - дифференциальное уравнение 1-ого порядка, общим решением которого является функция $p = \varphi(x, c_1)$

Заменяя $p = y'$, имеем $y' = \varphi(x, c_1)$

$$y = \int \varphi(x, c_1) dx + c_2$$

	Вид уравнения	Метод решения
1 .	$y''=f(x)$	Двукратное интегрирование: а) $y' = \int f(x)dx + c_1$ б) $y = \int [\int f(x)dx + c_1]dx + c_2$
2 .	$y''=f(x,y)$	Подстановка $y' = z, y'' = z'$
3 .	$y''=f(y, y')$	Подстановка $y' = p, y'' = p'$
4 .	$y''=f(y')$	Подстановки а) $y' = z, y'' = z'$ б) $y' = p, y'' = p'$
5 .	$y''=f(y)$	Подстановка $y' = p, y'' = p'$

Пример

$$y^{(4)} = \sin 2x$$

$$y''' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + c_1$$

$$y'' = \int \left(-\frac{1}{2} \cos 2x + c_1\right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + c_1 x + c_2$$

$$y' = \frac{1}{8} \cos 2x + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3$$

$$y = \frac{1}{16} \sin 2x + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4$$

Пример.

$$y''' = 60x^2 \quad | \cdot dx$$

$$y''' dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y''' dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60 \int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad | \cdot dx \Rightarrow$$

$$y'' dx = (20x^3 + C_1) dx \Rightarrow \int y'' dx = \int (20x^3 + C_1) dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1x + C_2 \quad | \cdot dx$$

$$y' dx = (5x^4 + C_1x + C_2) dx \Rightarrow \int y' dx = \int (5x^4 + C_1x + C_2) dx$$

$$y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

Пример

Найти частное решение ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$y''' = e^{2x}, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -\frac{1}{2}$$

Уравнение третьего порядка – три начальных условия.

Решение: данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$, а значит, нам нужно последовательно проинтегрировать правую часть три раза.

Сначала понижаем степень уравнения до второго порядка:

$$y'' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$$

Первый интеграл принёс нам константу C_1 . В уравнениях рассматриваемого типа рационально сразу же применять подходящие начальные условия.

Итак, у нас найдено $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, и, очевидно, к полученному уравнению подходит начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$. В соответствии с этим условием:

$$y''(0) = \frac{1}{2} + C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = -1$$

Таким образом: $y'' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$

На следующем шаге берём второй интеграл, понижая степень уравнения до первого порядка:

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} - 1 \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} - x + C_2$$

Выползла константа C_2 , с которой мы немедленно справляемся. Возникла тут у меня забавная ассоциация, что я злой дед Мазай с одноствольным ружьём. Ну и действительно, константы «отстреливаются», как только покажут уши из-под интеграла.

В соответствии с начальным условием $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 + C_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow C_2 = 0$$

Таким образом: $y' = \frac{1}{4} e^{2x} - x$

И, наконец, третий интеграл:

$$y = \int \left(\frac{1}{4} e^{2x} - x \right) dx = \dots$$

Для третьей константы используем последний патрон $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + C_3 = \frac{9}{8} \Rightarrow C_3 = 1$$

Ответ: частное решение: $y = \frac{1}{8} e^{2x} - \dots$

Выполним **проверку**, благо, она ненапряжная и чёткая:

1) Проверяем начальное условие $y(0) = \frac{9}{8}$:

$$y(0) = \frac{1}{8} - 0 + 1 = \frac{9}{8} \text{ — выполнено.}$$

2) Находим производную:

$$y' = \left(\frac{1}{8}e^{2x} - \frac{x^2}{2} + 1 \right)' = \frac{1}{8} \cdot 2e^{2x} - \frac{2x}{2} + 0 = \frac{1}{4}e^{2x} - x$$

Проверяем начальное условие $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y'(0) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \text{ — выполнено.}$$

3) Находим вторую производную:

$$y'' = \left(\frac{1}{4}e^{2x} - x \right)' = \frac{1}{2}e^{2x} - 1$$

Проверяем начальное условие $y''(0) = -\frac{1}{2}$:

$$y''(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ — выполнено.}$$

4) Найдем третью производную:

$$y''' = \left(\frac{1}{2}e^{2x} - 1 \right)' = e^{2x} - 0 = e^{2x}$$

Получено исходное дифференциальное уравнение $y''' = e^{2x}$

Вывод: задание выполнено верно.