

Лекция 4. Формула Грина. Поверхностные интегралы.

4.1. Формула Грина.

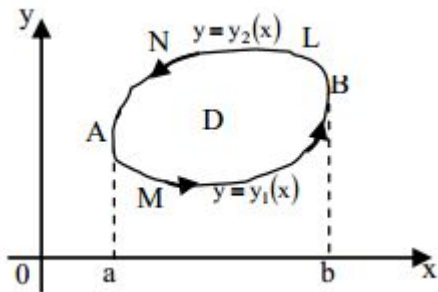
Пусть D - плоская область, ограниченная линией L . В замкнутой области \bar{D} заданы функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$, непрерывные вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$, $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Тогда справедлива формула, называемая формулой Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \int_L X(x, y) dx + Y(x, y) dy, \quad (1)$$

где замкнутый контур L проходит в положительном направлении, т.е. при движении по контуру область D остается слева.

Выведем формулу (1).

Пусть отнесенная к плоскости xOy область D правильна как в направлении оси Ox , так и в направлении оси Oy . Для определенности предположим, что граница L состоит из двух дуг AMB и ANB , заданных соответственно уравнениями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $a \leq x \leq b$.



Рассмотрим сначала двойной интеграл

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy.$$

Так как $X = X(x, y)$ при постоянном x есть одна

из первообразных для $\frac{\partial X}{\partial y}$, то

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial X}{\partial y} dy = X(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))$$

4.1. Формула Грина. Продолжение

Поэтому

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy &= \int_a^b [X(x, y_2(x)) - X(x, y_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b X(x, y_2(x)) dx - \int_a^b X(x, y_1(x)) dx.\end{aligned}$$

Каждый из этих двух определенных интегралов можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по соответствующей дуге

$$\int_a^b X(x, y_2(x)) dx = \int_{ANB} X(x, y) dx, \quad \int_a^b X(x, y_1(x)) dx = \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = \int_{ANB} X(x, y) dx - \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

Но

$$\int_{ANB} X(x, y) dx = - \int_{BNA} X(x, y) dx,$$

поэтому

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = - \int_{BNA} X(x, y) dx - \int_{AMB} X(x, y) dx.$$

4.1. Формула Грина. Продолжение

Так как дуги BNA и AMB дают в совокупности границу L , проходимую в положительном направлении, то, воспользовавшись свойством аддитивности, получаем

$$\iint_D \frac{\partial X}{\partial y} dx dy = - \oint_L X(x, y) dx. \quad (2)$$

Аналогично устанавливается формула

$$\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} dx dy = - \oint_L Y(x, y) dy. \quad (3)$$

Вычитаем (3) из (2)

$$\iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L X dx + Y dy.$$

Формула Грина справедлива для любой области, которую можно разбить на правильные области.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования.

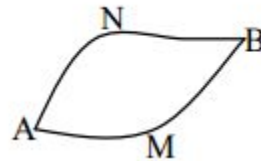
ЛЕММА. Пусть функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D . Для того чтобы криволинейный интеграл не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру, был равен нулю.

Напомним, что область D (открытая или замкнутая) называется односвязной, если для любого замкнутого контура, лежащего в этой области, ограниченная им часть плоскости целиком принадлежит области D .

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл

$$\oint_L X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

не зависит от пути интегрирования. Покажем, что он равен нулю по любому замкнутому контуру. Рассмотрим две произвольные линии AMB и ANB , лежащие в области D и соединяющие данные точки A и B . Так как по условию интеграл по линии AMB равен интегралу по линии ANB :



$$\int_{AMB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy = \int_{ANB} X(x, y)dx + Y(x, y)dy, \quad (4)$$

то имеем

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy - \int_{ANB} Xdx + Ydy = 0.$$

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

На основании свойств криволинейного интеграла имеем

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy + \int_{BNA} Xdx + Ydy = 0.$$

Следовательно,

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0, \quad (5)$$

где $L \equiv AMBNA$.

Действительно, если криволинейный интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей точки А и В, а зависит только от положения этих точек, то интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Достаточность. Пусть интеграл по любому замкнутому контуру $L \equiv AMBNA$ равен нулю, т.е.

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \oint_L Xdx + Ydy &= \int_{AMB} Xdx + Ydy + \int_{BNA} Xdx + Ydy = \\ &= \int_{AMB} Xdx + Ydy - \int_{ANB} Xdx + Ydy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{AMB} Xdx + Ydy = \int_{ANB} Xdx + Ydy.$$

Таким образом, если криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, то этот интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей две любые точки А и В, а зависит только от положения этих точек.

Итак, из равенства (4) следует выполнимость равенства (5) и, наоборот, из (5) следует (4).

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Теорема. Пусть в некоторой замкнутой ограниченной односвязной области D функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X(x, y)}{\partial y}$; $\frac{\partial Y(x, y)}{\partial x}$. Тогда, для того чтобы криволинейный интеграл по замкнутому контуру L , лежащему в этой области, был равен нулю, т.е. выполнялось равенство (1.63)

$$\oint_L Xdx + Ydy = 0,$$

необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (6)$$

во всех точках области D .

Доказательство. Достаточность. Возьмем произвольный замкнутый контур $L \subset D$ и к интегралу по этому контуру применим формулу Грина

$$\oint_L Xdx + Ydy = \iint_D \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy.$$

Так как по условию $\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}$, то двойной интеграл обращается в ноль и,

следовательно, $\oint_L Xdx + Ydy = 0$.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Необходимость. Следует доказать, что выполнение (5) влечет выполнение (6). Предположим противное: условие (6) не выполняется,

т.е. $\frac{\partial Y}{\partial x} \neq \frac{\partial X}{\partial y}$ хотя бы в одной точке $M(x_0, y_0)$ из области D . Пусть,

например,

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right)_M > 0.$$

В силу непрерывности частных производных их разность, как функция непрерывная, будет положительной и в некоторой достаточно малой области

D^* окрестности точки M , т.е. выполняется $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} > 0$.

Двойной интеграл по области D^* от положительной функции в силу известного свойства интеграла также будет иметь положительное значение

$$\iint_{D^*} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy > 0.$$

Но по формуле Грина $\iint_{D^*} \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{L^*} X dx + Y dy$,

где L^* - граница области D^* . По предположению криволинейный интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю, значит,

$$\oint_{L^*} X dx + Y dy = 0.$$

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Последнее же неравенство противоречит этому условию. А это значит, что предположение $\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \neq 0$ хотя бы в одной точке было неверным.

Следовательно $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$ во всех точках области D . Теорема доказана.

Напомним: выражение

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy$$

можно рассматривать как полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, т.е. $du = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$.

Теорема. При прежних предположениях относительно функций $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ для того, чтобы выражение $Xdx + Ydy$ было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, выполнение условия $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}$.

Следствие. При сделанных ранее предположениях относительно функций X и Y , для того чтобы интеграл

$$\int_L Xdx + Ydy$$

не зависел от пути интегрирования (а интеграл по замкнутому контуру равнялся нулю), необходимо и достаточно, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом.

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Теорема. Пусть функции $X(x, y)$, $Y(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial X}{\partial y}$ и $\frac{\partial Y}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области D . Тогда выполнение одного из следующих четырех утверждений влечет выполнение остальных трех.

1. Криволинейный интеграл $\int_{AB} Xdx + Ydy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей две данные точки.

2. Криволинейный интеграл $\oint_L Xdx + Ydy$, взятый по любому замкнутому контуру, целиком лежащему в области D , равен нулю.

3. Выражение $Xdx + Ydy$ является полным дифференциалом $du = Xdx + Ydy$ некоторой функции $u(x, y)$.

4. Во всех точках области D выполняется равенство

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Связь равносильных между собой утверждений 1-4 можно изобразить схемой:

$$1. \rightarrow 2. \rightarrow 3. \rightarrow 4. \rightarrow 1.$$

4.2. Независимость интегралов от формы пути интегрирования. Продолжение

Следствие. Из первых трех высказываний следует, что

$$\int_{A(x_1, y_1)}^{B(x_2, y_2)} Xdx + Ydy = \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} du(x, y) = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1).$$

Эту формулу естественно называть обобщенной формулой Ньютона-Лейбница. Она будет весьма полезной в теории поля, в частности, при вычислении работы потенциальной силы.

ПРИМЕР. Найти $I = \int_{(1;2)}^{(3;4)} ydx + xdy$.

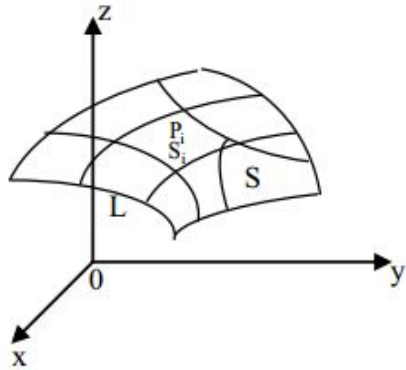
Когда найдена функция $u(x, y)$ - первообразная для подынтегрального выражения $Xdx + Ydy$, значение криволинейного интеграла между любыми двумя точками легко вычисляется по обобщенной формуле Ньютона-Лейбница.

Легко видеть, что $u(x, y) = x \cdot y$, т.к. $ydx + xdy = d(xy)$, поэтому

$$I = \int_{(1;2)}^{(3;4)} d(xy) = xy \Big|_{(1;2)}^{(3;4)} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10.$$

4.3. Определение поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Поверхностный интеграл первого рода представляет собой обобщение двойного интеграла, каким криволинейный интеграл первого рода является по отношению к определенному интегралу.



Это обобщение строится так. Пусть в точках гладкой (или кусочно-гладкой) поверхности S , ограниченной кусочно-гладким контуром L , определена функция $f(P) = f(x, y, z)$. Разобьем поверхность S произвольно проведенными кривыми на части S_1, S_2, \dots, S_n , площадь каждой из которых

обозначим ΔS_i ($i = \overline{1, n}$)

. Выбрав в каждой из площадок произвольную точку P_i , вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$ и умножим его на площадь ΔS_i элементарной части S_i . Составим сумму произведений $f(P_i)\Delta S_i$

$$I_n = \sum_{i=1}^n f(P_i)\Delta S_i, \quad (7)$$

которую будем называть интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ по поверхности S . Наибольший из диаметров ячеек S_i обозначим $\max \Delta S_i$.

Перейдем в равенстве (7) к пределу при условии стремлении к нулю $\max \Delta S_i$, что влечет увеличение числа n ячеек S_i и стягивание каждой из них в точку.

4.3. Определение поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при стремлении $\max \Delta S_i$ к нулю, существует конечный предел интегральных сумм (7), который не зависит от способа разбиения поверхности S на части S_i и от выбора точек $P_i \in S_i$, то его называют поверхностным интегралом первого рода от функции $f(P) = f(x, y, z)$ по поверхности S или интегралом по площади поверхности S и обозначают

$$\iint_S f(P) dS \quad \text{или} \quad \iint_S f(x, y, z) dS.$$

Итак, по определению

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{\substack{\max \Delta S_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i \quad (8)$$

(dS - дифференциал площади поверхности).

Теорема. существования поверхностного интеграла первого рода: если функция $f(x, y, z)$ непрерывна вдоль кусочно-гладкой поверхности S , то интеграл по площади поверхности существует.

Поверхностный интеграл первого рода обладает теми же свойствами, что и двойной интеграл. В частности, выполняется свойство аддитивности: если поверхность S разбита на части S_1 и S_2 , то

$$\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} .$$

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Пусть задана гладкая поверхность S уравнением $z = z(x, y)$. Так как поверхность гладкая, то следовательно $z(x, y)$ - непрерывная функция вместе со своими частными производными. И пусть на поверхности S определена непрерывная функция $u = f(x, y, z)$. Требуется вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S f(x, y, z) dS.$$

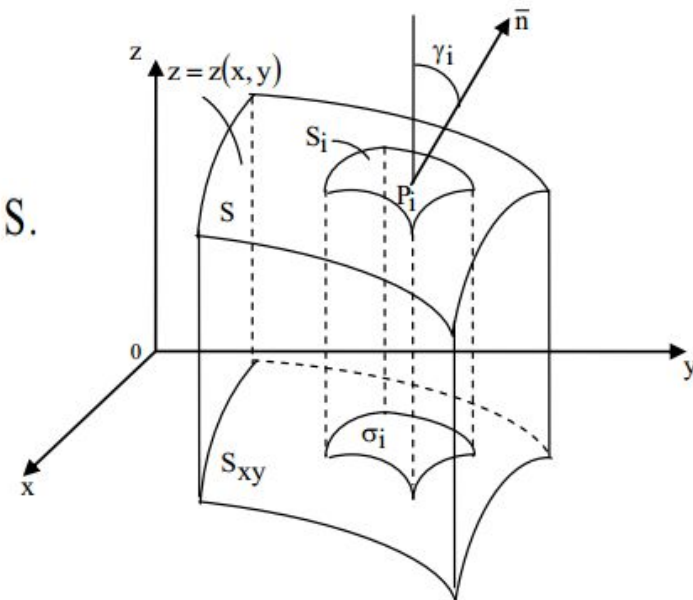
Предварительно займемся выводом формулы для вычисления площади ΔS_i элементарной части S_i поверхности S .

выделен участок S_i разбиения области S на элементарные части с выбранной на нем точкой P_i , которая имеет координаты $x_i, y_i, z_i = z(x_i, y_i)$.

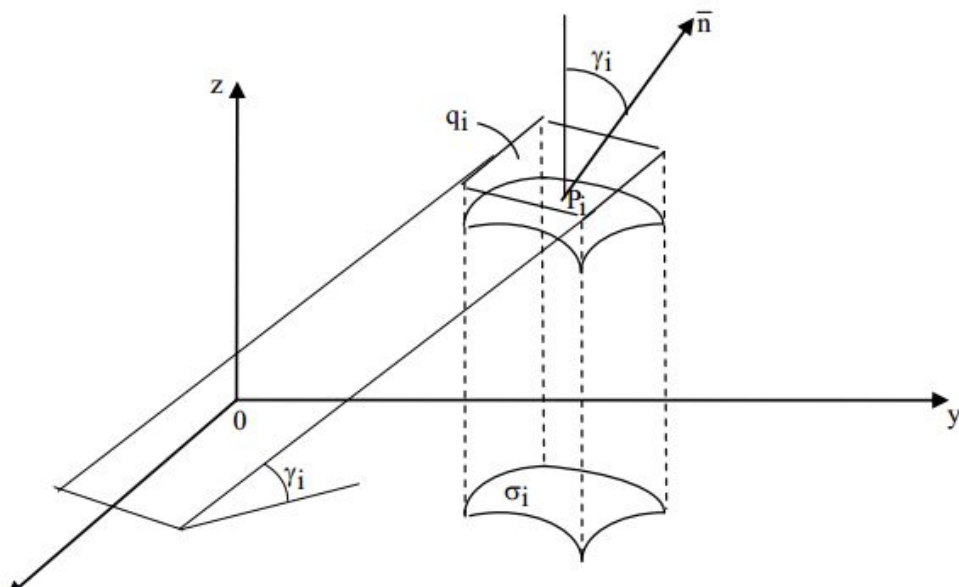
Через точку $P_i \in S_i$ проведем касательную плоскость к поверхности S .

Уравнение касательной плоскости, как известно, имеет вид

$$z - z_i = z'_x(x_i, y_i)(x - x_i) + z'_y(x_i, y_i)(y - y_i).$$



4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).



На этой плоскости выделим элемент q_i с площадью Δq_i , который проектируется на плоскость xOy в ту же элементарную область σ_i , что и элемент S_i . Заменяем криволинейный элемент S_i плоским элементом q_i , тогда

$$\Delta S_i \approx \Delta q_i.$$

(9)

Обозначим через γ_i двугранный угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy .

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Вспользуемся соотношением из аналитической геометрии: площадь S_1 проекции плоской фигуры равна площади S самой этой фигуры, умноженной на абсолютную величину косинуса двугранного угла φ между плоскостями, т.е.

$$S_1 = S \cdot |\cos \varphi|.$$

В наших обозначениях имеем

$$\Delta\sigma_i = \Delta q_i \cdot |\cos \gamma_i|,$$

откуда в силу формулы (9) получаем

$$\Delta S_i \approx \frac{\Delta\sigma_i}{|\cos \gamma_i|}.$$

Линейный угол двугранного угла γ_i есть в то же время угол между осью Oz и перпендикуляром \bar{n} к касательной плоскости. И поэтому

$$|\cos \gamma_i| = \left| \cos \left(\bar{n}, \hat{Oz} \right) \right|. \quad (10)$$

Это позволяет нам найти косинус угла между векторами \bar{n} и \bar{k} (\bar{k} - орт оси Oz), по известной формуле

$$\cos \left(\bar{n}, \hat{\bar{k}} \right) = \frac{\bar{n} \cdot \bar{k}}{|\bar{n}| \cdot |\bar{k}|}.$$

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

Нормальный вектор \bar{n} касательной плоскости, как видно из ее уравнения, имеет координаты $z'_x(x_i, y_i)$, $z'_y(x_i, y_i)$, -1 , а вектор $\bar{k} = \{0, 0, 1\}$. Тогда

$$\cos\left(\bar{n}, \hat{Oz}\right) = \frac{-1}{\sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}}. \quad (11)$$

Таким образом, с учетом (10) и (11) получаем

$$\Delta S_i \approx \sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)} \cdot \Delta \sigma_i. \quad (12)$$

А теперь, для решения поставленной задачи о вычислении поверхностного интеграла, вернемся к интегральной сумме (7), соответствующей данному разбиению поверхности S на части ΔS_i ($i = \overline{1, n}$) и выбору точек P_i . Принимая во внимание полученное выражение для ΔS_i (12), запишем

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)} \cdot \Delta \sigma_i. \quad (13)$$

В этом равенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$, считая, что каждая из элементарных областей стягивается в точку. Сумма, стоящая в правой части равенства, является интегральной суммой для непрерывной функции $f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'^2_x(x_i, y_i) + z'^2_y(x_i, y_i)}$ по области S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy . Поэтому ее предел есть двойной интеграл от указанной функции двух переменных по области S_{xy} .

4.4. Вычисление поверхностного интеграла первого рода (или по площади поверхности).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел суммы, стоящей в левой части равенства (13), есть поверхностный интеграл от функции $f(x, y, z)$ по поверхности S (т.е. 1-го рода).

Следовательно,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2(x, y) + z'_y{}^2(x, y)} d\sigma,$$

иначе

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2(x, y) + z'_y{}^2(x, y)} dx dy. \quad (14)$$

где S_{xy} - проекции поверхности S на плоскость xOy .

Если вместо плоскости xOy поверхность S можно спроектировать на плоскости xOz или yOz , тогда переименовав роли координат x , y и z , из равенства (14), можно получить следующие формулы:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + x'_y{}^2(y, z) + x'_z{}^2(y, z)} dy dz,$$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_{xz}} f(x, y(x, z), z) \sqrt{1 + y'_x{}^2(x, z) + y'_z{}^2(x, z)} dx dz,$$

где $x = x(y, z)$ $y = y(x, z)$ - уравнения поверхности S , разрешенные относительно x и y соответственно, а S_{yz} , S_{xz} - проекции поверхности S на координатные плоскости yOz и xOz .

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Пусть в прямоугольной системе координат $OXYZ$ задана некоторая область V . Пусть в этой области задана поверхность σ , ограниченная замкнутым контуром L . Относительно поверхности σ будем предполагать, что она гладкая или кусочно-гладкая, то есть в каждой ее точке P определяется положительное направление нормали единичным вектором $\bar{n}(P)$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности σ .

Пусть в каждой точке поверхности σ определен вектор

$$\bar{F} = \bar{X}(x, y, z)\bar{i} + Y(x, y, z)\bar{j} + Z(x, y, z)\bar{k} \quad (15)$$

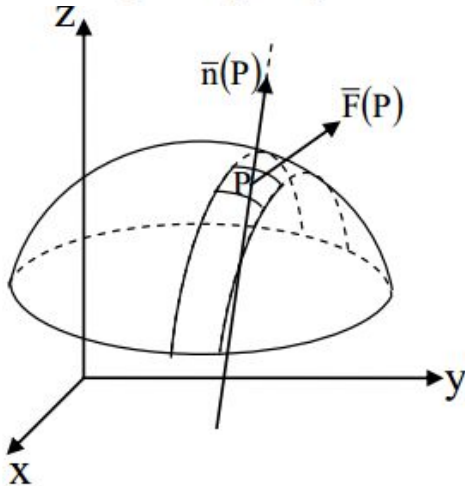
или $\bar{F} = \{\bar{X}(x, y, z); Y(x, y, z); Z(x, y, z)\}$,

где $X = X(x, y, z)$; $Y = Y(x, y, z)$; $Z = Z(x, y, z)$ - непрерывные функции.

Разобьем поверхность σ произвольным образом на n элементарных площадок $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, n$). На каждой площадке возьмем произвольно точку P_i и рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^n (\bar{F}(P_i) \cdot \bar{n}(P_i)) \cdot \Delta\sigma_i, \quad (16)$$

где $\bar{F}(P_i)$ - значение вектора (15) в точке P_i ; $\bar{n}(P_i)$ - единичный вектор нормали в этой точке; $\bar{F}(P_i) \cdot \bar{n}(P_i)$ - скалярное произведение этих векторов. Сумма (16) называется интегральной суммой. При различных разбиениях поверхности σ на элементарные площадки получаем различные значения интегральной суммы (16).



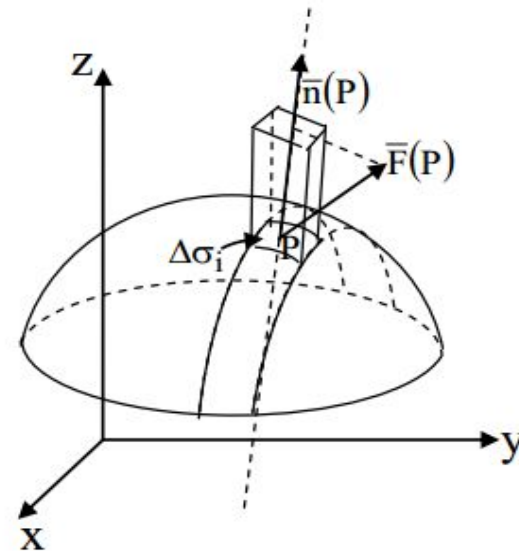
4.5. Поверхностный интеграл второго рода по координатам

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Предел суммы (16) при $n \rightarrow \infty$ (таким образом, чтобы наибольшая из $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$) называется поверхностным интегралом второго рода:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta\sigma_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n (\bar{F}(P_i) \cdot \bar{n}(P_i)) \cdot \Delta\sigma_i = \iint_{\sigma} (\bar{F} \cdot \bar{n}) \cdot d\sigma. \quad (17)$$

Каждое i -е слагаемое суммы (17) можно рассматривать как объем призмы с основанием $\Delta\sigma_i$ и с высотой $\bar{F}(P_i) \cdot \bar{n}(P_i)$.

Физический смысл поверхностного интеграла второго рода. Вектор \bar{F} может определять направление скоростей: потока жидкости, потока воздуха, потока частиц газа, магнитных полей и т.д. Если вектор \bar{F} определяет скорость жидкости, протекающей через поверхность σ , то произведение $(\bar{F}(P_i) \cdot \bar{n}(P_i)) \cdot \Delta\sigma_i$ равно количеству жидкости, протекающей через площадку $\Delta\sigma_i$ за единицу времени в направлении вектора $\bar{n}(P_i)$.



Тогда выражение $\iint_{\sigma} (\bar{F} \cdot \bar{n}) \cdot d\sigma$ из формулы

(17) есть общее количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность σ в положительном направлении. Поэтому поверхностный интеграл (17) называется потоком векторного поля \bar{F} через поверхность σ .

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Выразим единичный вектор \bar{n} через его проекции на оси координат:

$$\bar{n} = \{\cos \alpha; \cos \beta; \cos \gamma\}, \quad (18)$$

где α, β, γ - углы между вектором \bar{n} и положительными направлениями осей Ox, Oy, Oz соответственно. Подставляя в интеграл (17) проекции вектора \bar{F} из (15) и проекции вектора \bar{n} из (18), получим:

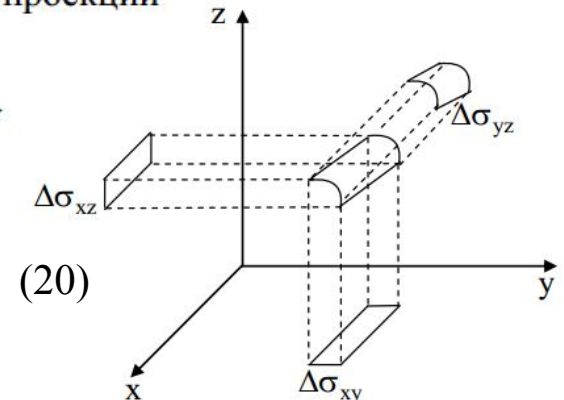
$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (\bar{F} \cdot \bar{n}) \cdot d\sigma &= \iint_{\sigma} (X(x, y, z)\cos \alpha + Y(x, y, z)\cos \beta + Z(x, y, z)\cos \gamma) d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma} X(x, y, z)(\cos \alpha \cdot d\sigma) + Y(x, y, z)(\cos \beta \cdot d\sigma) + Z(x, y, z)(\cos \gamma \cdot d\sigma). \end{aligned} \quad (19)$$

Произведение $d\sigma \cdot \cos \alpha$ есть проекция площадки $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость yOz . Произведения $d\sigma \cdot \cos \beta$ и $d\sigma \cdot \cos \gamma$ есть проекции площадки $\Delta\sigma$ на координатные плоскости, соответственно, xOz и xOy . Поскольку разбиение поверхности σ производится произвольным образом, то можно произвести разбиения плоскостями параллельными координатным плоскостям и тогда при предельном переходе (при $n \rightarrow \infty$) площади проекций элементарной площадки $\Delta\sigma$ равны:

$$d\sigma \cdot \cos \alpha = dy \cdot dz; \quad d\sigma \cdot \cos \beta = dx \cdot dz; \quad d\sigma \cdot \cos \gamma = dx \cdot dy$$

и интеграл (19) принимает вид:

$$\iint_{\sigma} (\bar{F} \cdot \bar{n}) \cdot d\sigma = \iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz + Y(x, y, z) dx dz + Z(x, y, z) dx dy.$$



(20)

4.5. Поверхностный интеграл второго рода или по координатам

Из свойств поверхностного интеграла второго рода выделим два

$$1. \iint_{\sigma_+} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \cdot d\sigma = - \iint_{\sigma_-} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma, \quad (20)$$

где σ_+ - это сторона поверхности σ , соответствующая положительному направлению нормального вектора \vec{n} ; σ_- - противоположная сторона поверхности σ .

2. Если поверхность σ состоит из нескольких частей $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k$, тогда интеграл (19) есть сумма интегралов по этим частям поверхности:

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma_1} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma + \iint_{\sigma_2} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma + \dots + \iint_{\sigma_k} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma \quad (21)$$

4.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА второго рода

Вычисление интеграла (20) можно свести к вычислению двойных интегралов, если правую часть разложить в сумму трех интегралов:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz + \iint_{\sigma} Y(x, y, z) dx dz + \iint_{\sigma} Z(x, y, z) dx dy \quad (22)$$

и далее вычислять отдельно каждый из них (путем сведения подынтегральной функции к двум переменным).

Например, для первого интеграла из (21) $I_1 = \iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz$. Если область интегрирования, то есть поверхность σ , задана таким уравнением, что его можно преобразовать к виду $x = x(y, z)$, то данный интеграл I_1 вычисляем так:

$$\iint_{\sigma} X(x, y, z) dydz = \pm \iint_{\sigma_{yz}} X(x(y, z), y, z) dydz,$$

где знак \pm в силу формулы (20) будет определяться в зависимости от стороны поверхности σ (плюс, если $\cos \alpha = \cos(\vec{n}, \vec{Ox}) > 0$; минус, если $\cos \alpha < 0$); σ_{yz} - это проекция поверхности σ на координатную плоскость yOz

4.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА второго рода

Формула Остроградского-Гаусса

Если поверхность σ - замкнутая, V – тело, которое ограничивается поверхностью σ . Тогда имеет место формула

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} X(x, y, z)dydz + Y(x, y, z)dxdz + Z(x, y, z)dxdy = \\ & = \iiint_V \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dxdydz, \end{aligned} \quad (23)$$

где функции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ и их частные

производные $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ должны быть непрерывными в области V и на

границе, то есть на поверхности σ .

4.6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА второго рода

Формула Стокса

Если поверхность σ - незамкнута и ограничена замкнутым контуром L , то имеет место формула

$$\oint_L X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz =$$
$$= \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) dx dy,$$
(24)

где функции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ и их частные производные должны быть непрерывными функциями на поверхности σ и на ее границе, то есть на контуре L .