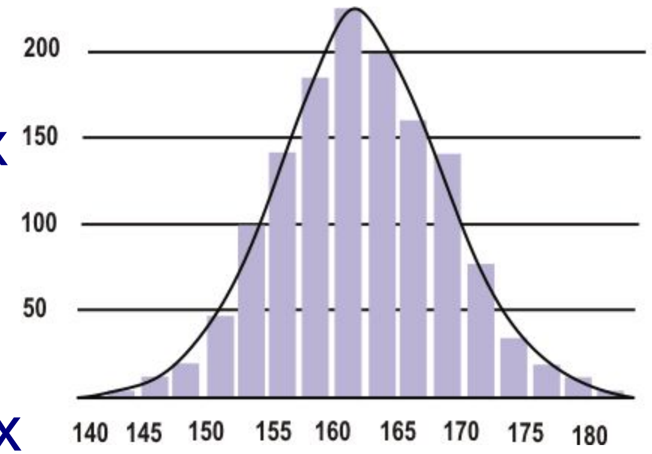
Нормальное распределение:

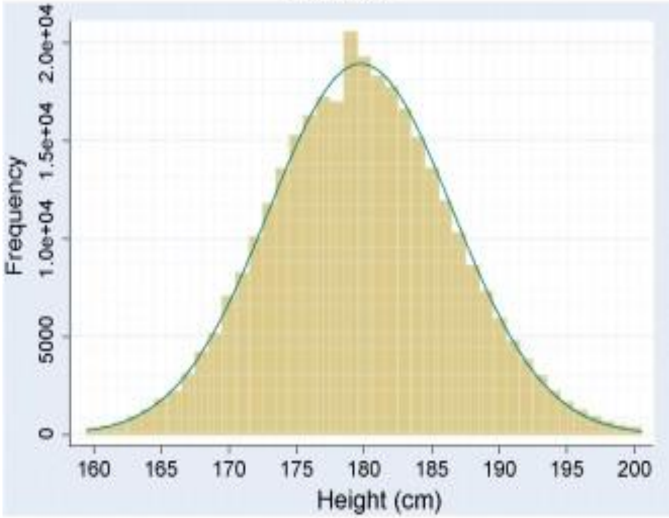
свойства и следствия из них

Нормальное распределение

Если результат наблюдения является суммой многих случайных слабо взаимозависимых величин, каждая из которых вносит малый вклад относительно общей суммы, то при увеличении числа слагаемых распределение центрированного и нормированного результата стремится к нормальному. Этот закон теории вероятностей имеет следствием широкое распространение нормального распределения, что и стало одной из причин его наименования.



(a) Height



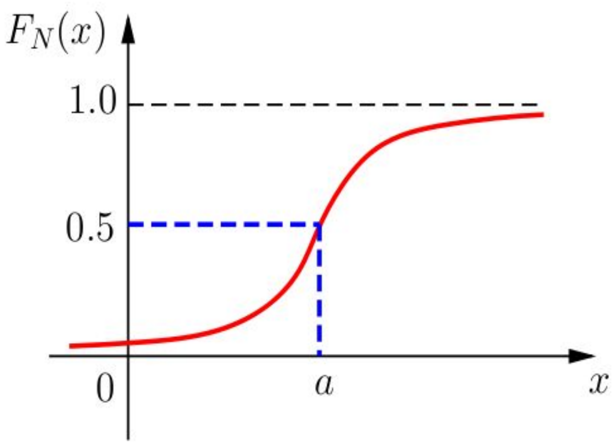
Закон нормального распределения

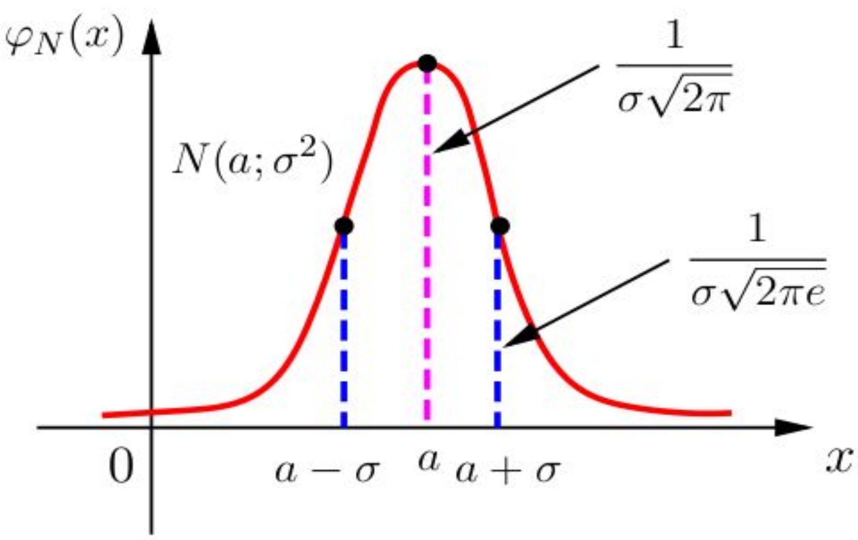
Непрерывная случайная величина X имеет нормальный закон распределения (закон Гаусса) с параметрами α и β, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\beta^2}}$$

Где:

- β — среднеквадратичное отклонение (σ);
- α — среднее (M);
- e, π - константы





Свойства нормального распределения

- Правило 3 сигм (99,72% значений лежат в рамках $M \pm 3\sigma$)
- Распределение симметрично (А=0), эксцесс (мера остроты пика) Е = 0
- Мода, медиана и среднее совпадают
- Значения, лежащие на равном расстоянии от М (среднего), имеют равную частоту в выборке

Проверка распределения на «нормальность»

- Графический способ (QQ-plot);
- Статистический критерий Колмогорова-Смирнова (N>50 человек) ;
- W-критерий Шапиро-Уилка (8<N<50 человек);
- Критерий асимметрии и эксцесса
- См. ГОСТ Р ИСО 5479—2002

Критерий асимметрии и эксцесса

1. Определить среднее арифметическое (M) и стандартное отклонение (σ).

2. Рассчитать показатели асимметрии и эксцесса.

- $A = \frac{\sum (X_i - M)^3}{N \cdot \sigma^3}$

$E = \frac{\sum (X_i - M^4)}{N \cdot \sigma^4} - 3$

3. Рассчитать критические значения A и E

$$A_{кр} = 3 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1) \cdot (n+3)}}$$

$$E_{кр} = 5 \cdot \sqrt{\frac{24 \cdot n \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{(n+1)^2 \cdot (n+3) \cdot (n+5)}}$$

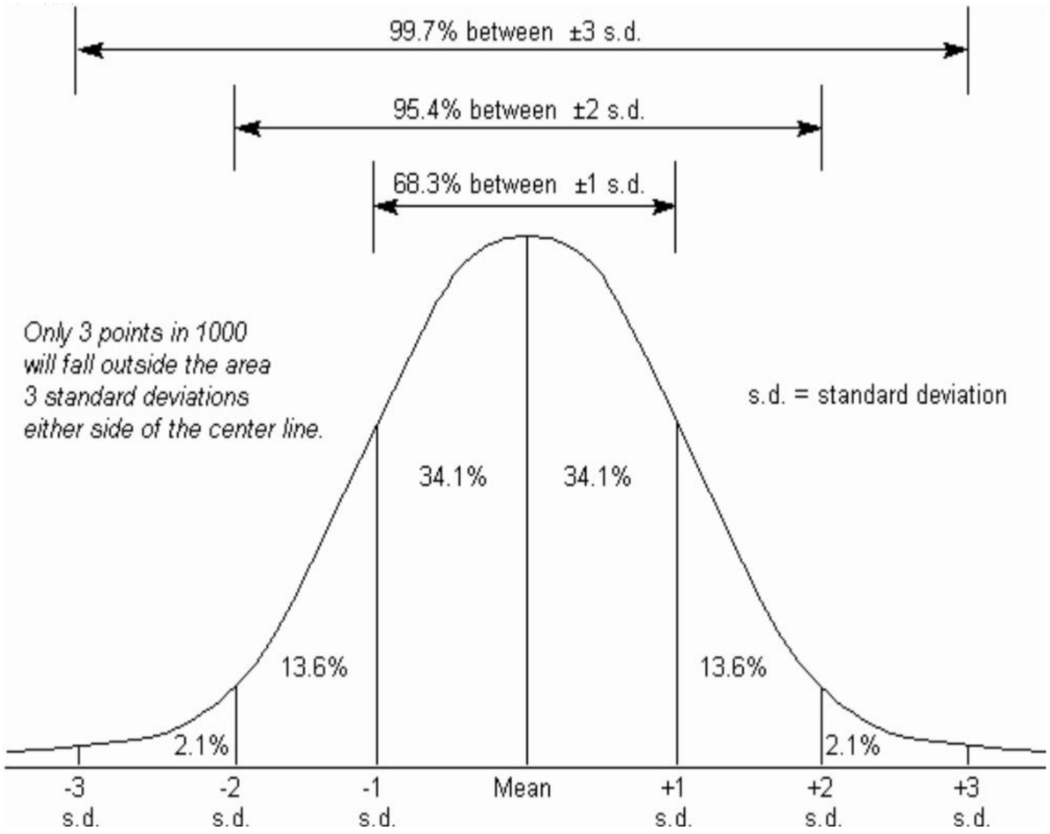
4. Если A<Aкр и E<Eкр, распределение нормально

Правило 3 сигм

При нормальном распределении:

- $M(+/-)\sigma=68,26\%$
- $M(+/-)2\sigma=95,44\%$
- $M(+/-)3\sigma=99,72\%$,

$M(+/-)3\sigma$ - интервал всех возможных значений



Стандартная шкала

- **Стандартизация**:
  перевод измерений в z-шкалу, т.е. шкалу со средним M=0 и σ=1

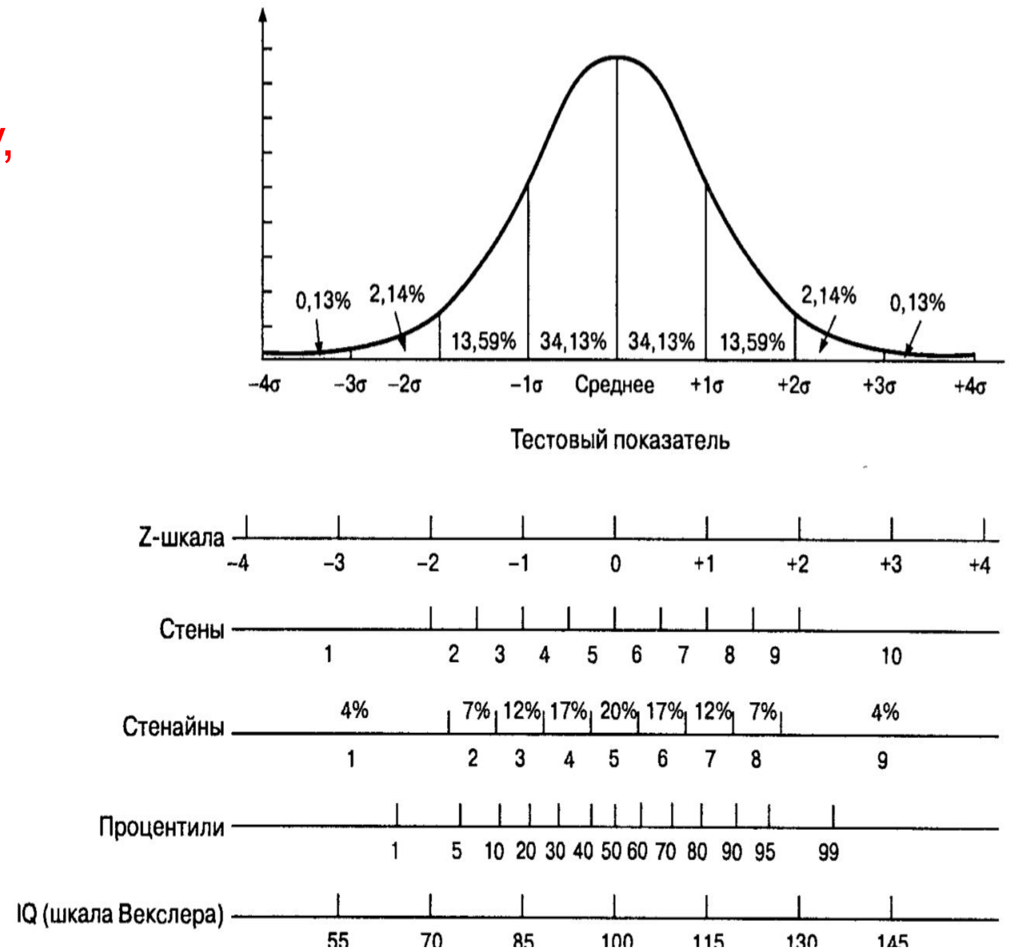
$$z_i=(x_i-M)/\sigma$$

- Все полученные z-значения выражаются в единицах стандартного отклонения

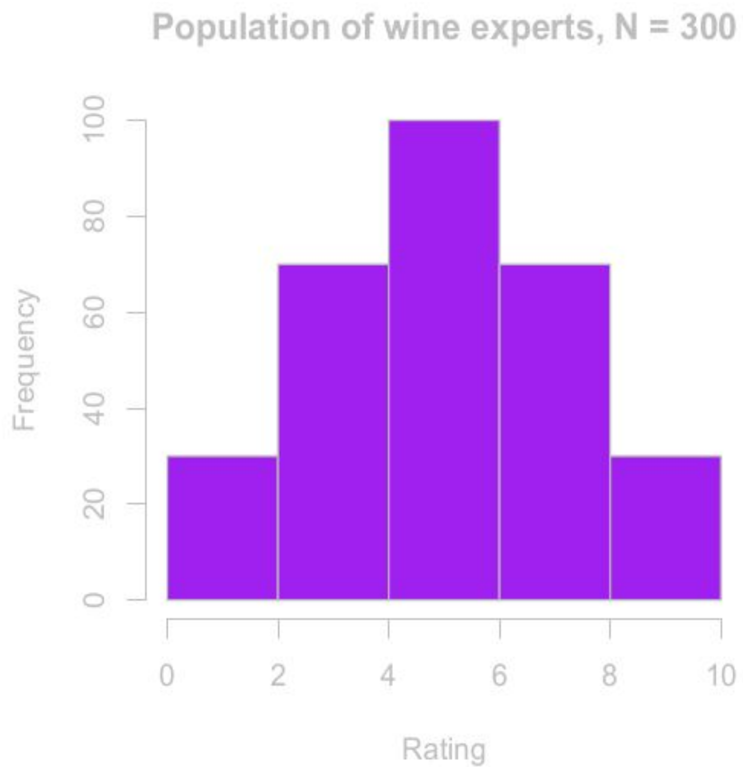
Z-шкала используется при стандартизации тестов

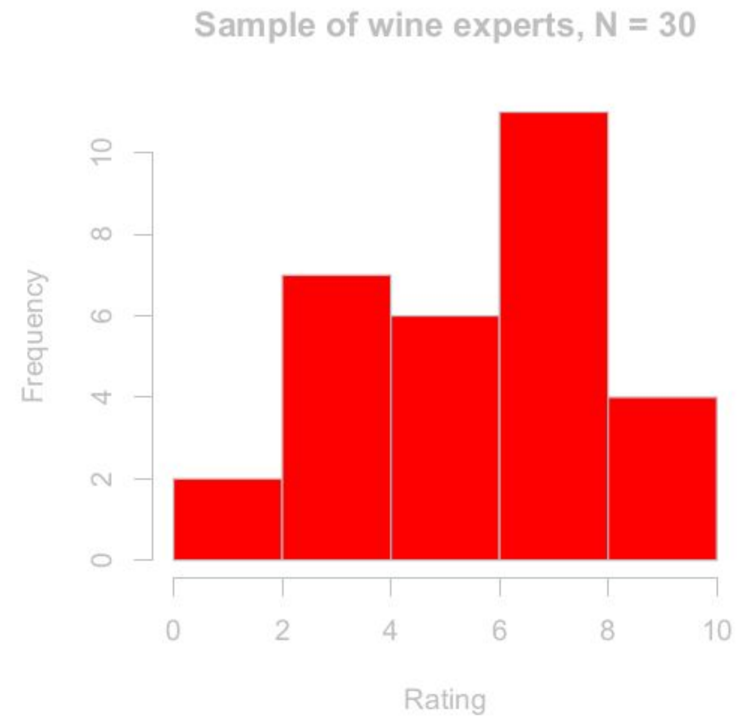
$$S_i=\sigma_s z_i+M_s$$

- Для стенов (st.ten) M_s=5,5 ; σ_s=2
- Для IQ-баллов M_s=100 ; σ_s=15



Ошибки выборки





$X = 5.5$

$\sigma = 2.22$

$M = 5.93$

$s = 2.45$

Чтобы не ошибиться

- Точечная оценка параметра=оценка одним числом

- Интервальная оценка параметра:

$$X_{min} < X < X_{max}$$

Интервал (Xmin,Xmax) = доверительный интервал

Оценки (параметры) в генеральной совокупности при многократном измерении остаются в пределах точности измерения

Статистические оценки в выборке (статистики) подвержены ошибкам и являются случайными величинами

Мы можем только приблизительно оценивать параметры генеральной совокупности с помощью точечного или интервального оценивания