

Множественная линейная регрессионная модель

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$



Темы лекции

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Множественная линейная регрессионная модель
- Метод наименьших квадратов оценки коэффициентов МЛРМ.
- Матричное выражение МНК-оценок коэффициентов МЛРМ.



Множественные регрессионные МОДЕЛИ

Независимая переменная Y характеризует состояние или поведение экономического объекта. Набор переменных X_1, \dots, X_k характеризуют этот экономический объект качественно или количественно.



МЛРМ $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Пример

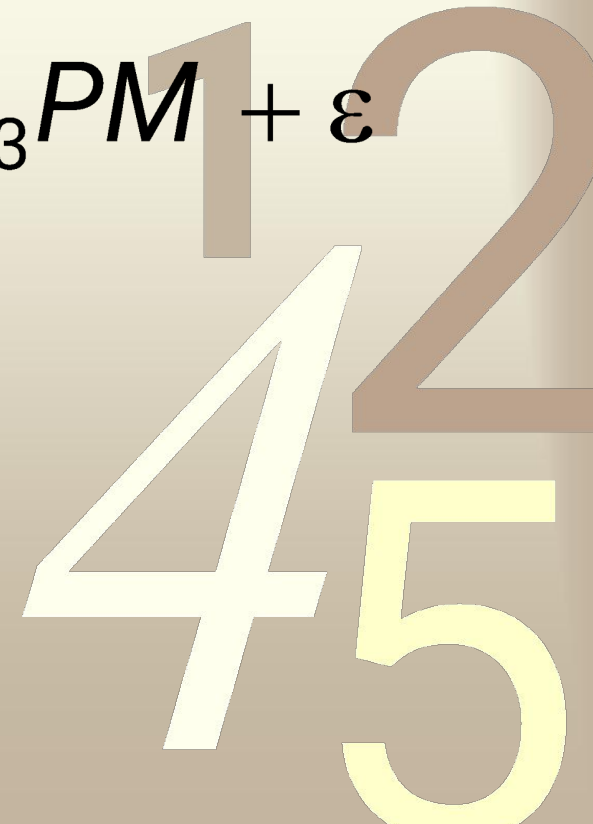
$$Q^D = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 X + \beta_3 PM + \varepsilon$$

где Q^D – объем спроса на масло,

X – доход,

P – цена на масло,

PM – цена на мягкое масло.



$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon$$

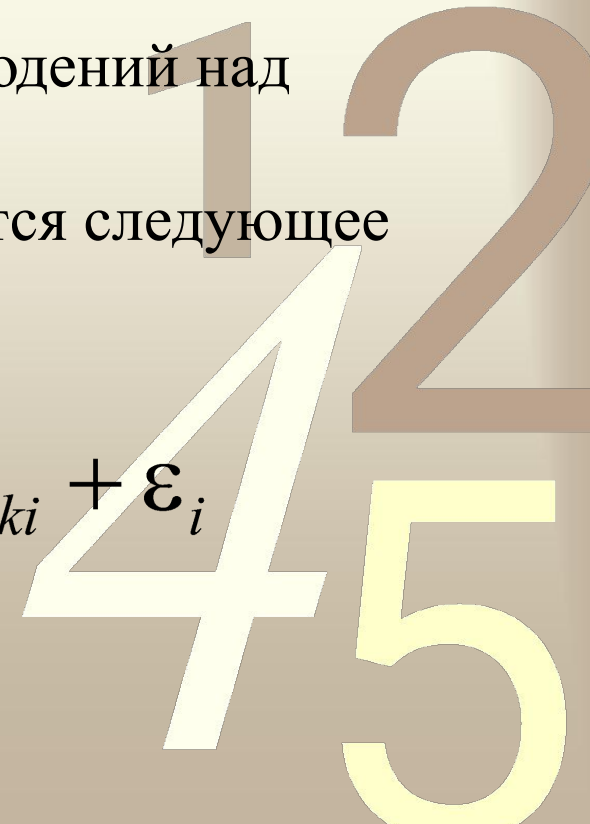
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Здесь нам неизвестны коэффициенты β и параметры распределения ε .

Для их оценки имеется выборка из N наблюдений над переменными Y и X_1, \dots, X_k .

Для каждого наблюдения должно выполняться следующее равенство:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i$$



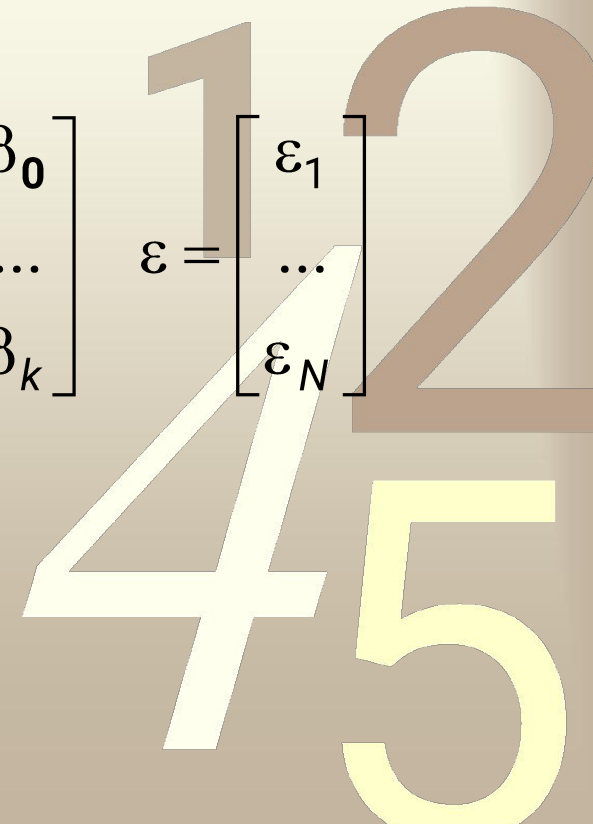
Матричная форма записи МЛРМ

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & X_{11} & \dots & X_{k1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{1} & X_{N1} & \dots & X_{kN} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}$$



Векторная форма записи МЛРМ

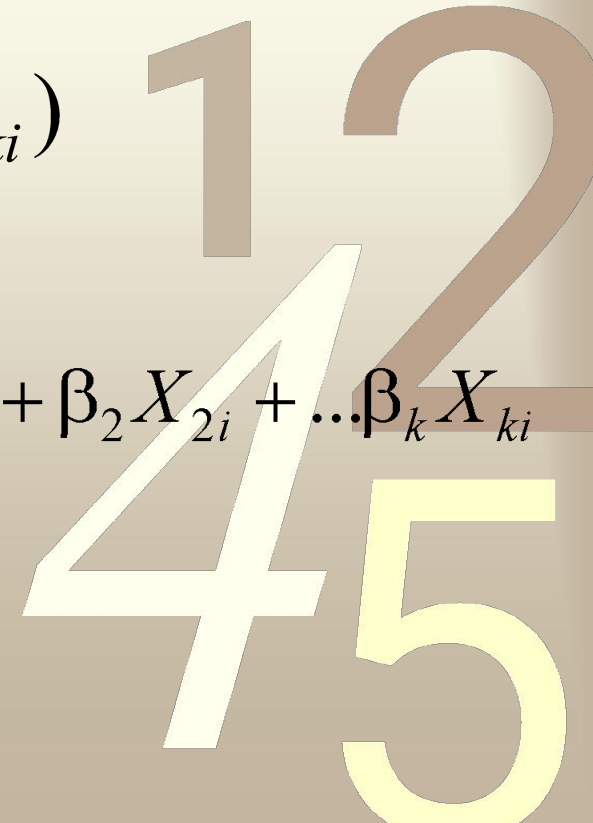
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$y_i = x'_i \beta + \varepsilon_i$$

где

$$x'_i = (1, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki})$$

$$x'_i \beta = (1, X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix} = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki}$$

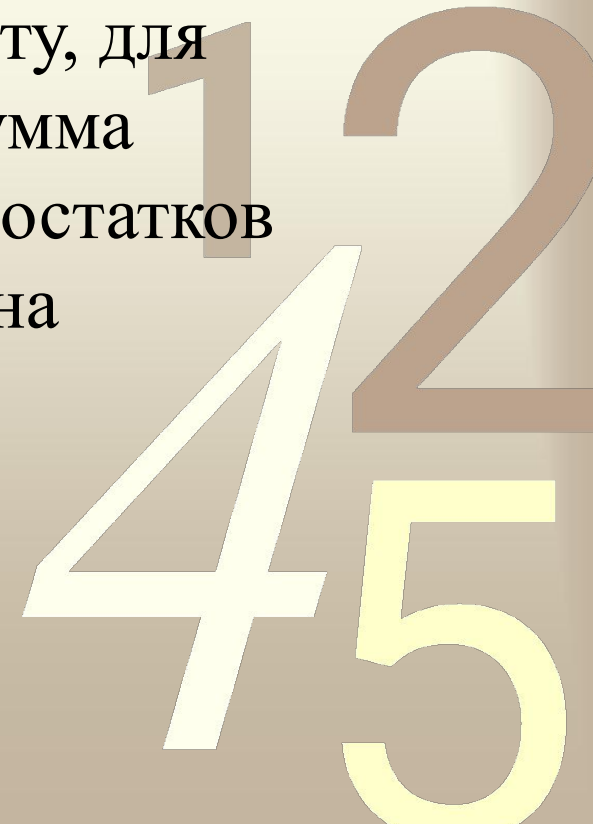


Метод наименьших квадратов

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\sum_{i=1}^N e_i^2 \rightarrow \min_{(\hat{\beta})}$$

Среди всех возможных гиперплоскостей выбираем ту, для которой сумма квадратов остатков минимальна



Что будем минимизировать

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \dots + \hat{\beta}_k X_{ki}$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}$$

$$RSS = \sum_{i=1}^N e_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki})^2 \rightarrow \min_{(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)}$$

Минимизация

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \\ \frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \\ \frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_2} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial RSS}{\partial \hat{\beta}_k} = 0 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{1i} = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{2i} = 0 \\ \dots \\ -2 \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{1i} - \dots - \hat{\beta}_k X_{ki}) X_{ki} = 0 \end{array} \right.$$

Система нормальных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} N\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki} = \sum_{i=1}^N Y_{1i} \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^N X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{1i}X_{2i} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{1i}X_{ki} = \sum_{i=1}^N Y_{1i}X_{1i} \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^N X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{1i}X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i}^2 + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{2i}X_{ki} = \sum_{i=1}^N Y_{1i}X_{2i} \\ \dots \\ \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^N X_{ki} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^N X_{1i}X_{ki} + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^N X_{2i}X_{ki} + \dots + \hat{\beta}_k \sum_{i=1}^N X_{ki}^2 = \sum_{i=1}^N Y_{1i}X_{ki} \end{array} \right.$$

Система линейных уравнений

Система в матричном виде

$$\begin{pmatrix} N & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} & \dots & \sum X_{ki} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i} & \dots & \sum X_{1i}X_{ki} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2 & \dots & \sum X_{2i}X_{ki} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum X_{ki} & \sum X_{1i}X_{ki} & \sum X_{2i}X_{ki} & \dots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \dots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum Y_i \\ \sum Y_i X_{1i} \\ \sum Y_i X_{2i} \\ \dots \\ \sum Y_i X_{ki} \end{pmatrix}$$

или

$$(X'X)\beta = X'Y$$



Итог

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y$$

МНК оценки коэффициентов МЛРМ

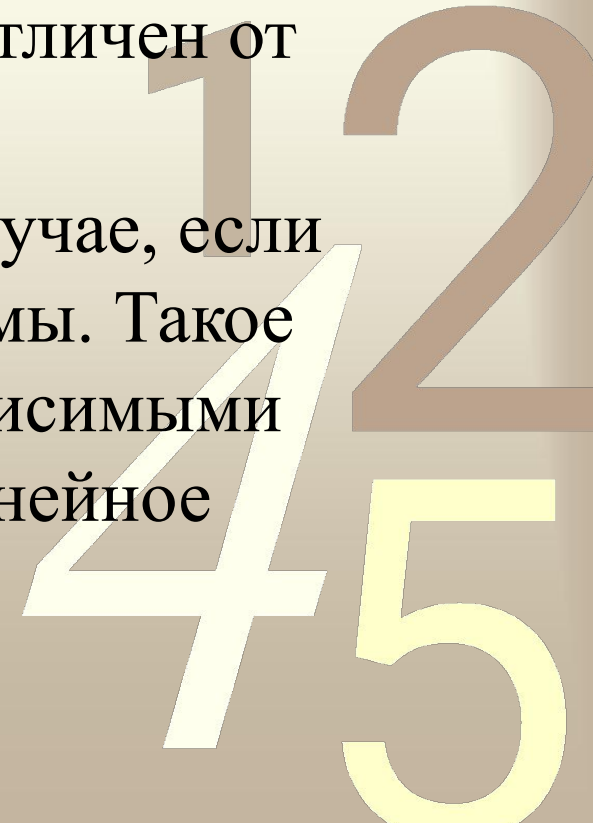
1 2
4 5

Полная мультиколлинеарность

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Коэффициенты по методу наименьших квадратов существуют не всегда, а только в том случае, когда определитель матрицы $(X'X)$ отличен от нуля.

Определитель будет равен нулю в случае, если столбцы матрицы X линейно зависимы. Такое может произойти, если между независимыми переменными существует точное линейное соотношение.



Пример

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 D + \beta_3 W + \varepsilon$$

где

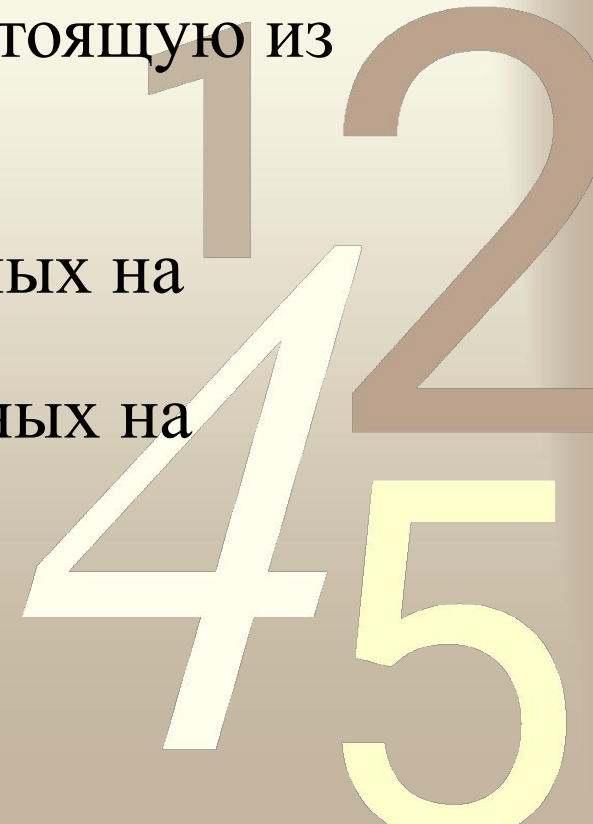
Y - средняя оценка на экзамене состоящую из трех объясняющих переменных:

I – доход родителей,

D – среднее число часов, затраченных на обучение в день,

W – среднее число часов, затраченных на обучение в неделю.

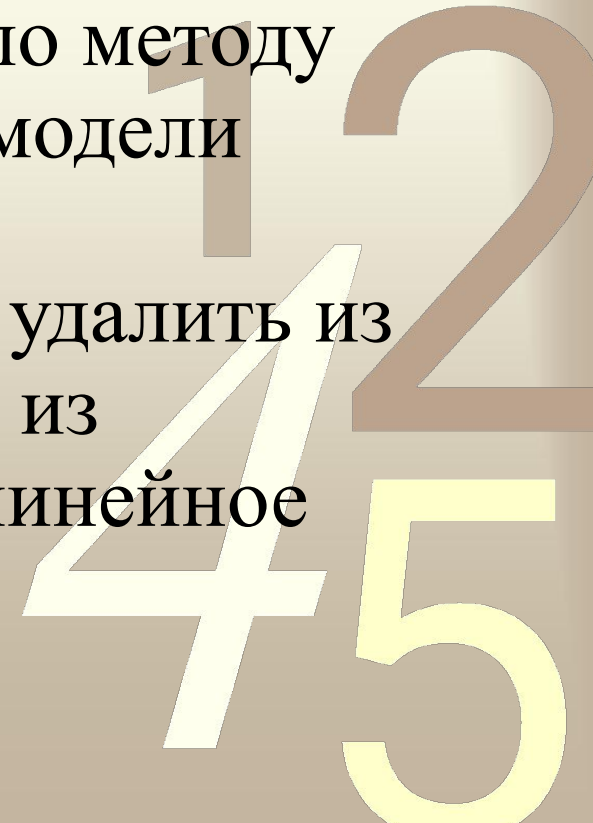
Очевидно, что $W=7D$.



0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Устранение полной мультиколлинеарности

Случай полной мультиколлинеарности отследить легко, поскольку в этом случае невозможно построить оценки по методу наименьших квадратов. Если в модели присутствует полная мультиколлинеарность, следует удалить из регрессионного уравнения одну из переменных, которые входят в линейное соотношение.



DUMMY TRAP

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Дамми-переменная – переменная, принимающая только два значения: 0 и 1.

С помощью таких переменных учитывается влияние качественных переменных, принимающих несколько значений.

1 2
4 5

Вопросы для самопроверки

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Система нормальных уравнений для нахождения коэффициентов по МНК.
- В каком случае линии регрессии по методу наименьших квадратов не существует
- Приведите пример модели, в которой присутствует полная мультиколлинеарность.
- Укажите размерности матриц, участвующих в формуле МНК-коэффициентов.
- Как устранить проблему полной мультиколлинеарности.
- Выведите систему нормальных уравнений.
- Выведите матричную формулу МНК коэффициентов.
- Приведите пример ситуации, когда линейной зависимости между объясняющими переменными нет, а коэффициенты МЛРМ не существуют.
- Как влияют выбросы на результаты оценивания.
- Как исследовать устойчивость результатов оценивания.

