

Катушки со сталью в цепи синусоидального тока

Для увеличения индуктивности катушек их располагают на сердечниках из ферромагнитного материала, обычно из листовой электротехнической стали. Анализ процессов, протекающих в цепи со сталью, включенной на синусоидальное напряжение, достаточно сложен, что объясняется следующими причинами:

1. Магнитная проницаемость ферромагнитных материалов, поток Φ не пропорционален намагничивающему току, а значит индуктивность катушки L меняется с изменением тока. Поэтому в расчете приходится использовать общее выражение закона электромагнитной индукции: $e = -\frac{d\Psi}{dt}$, а не $e = -L\frac{di}{dt}$, справедливого для линейных электрических цепей.

2. При протекании по катушке переменного тока в стальном сердечнике обязательно появятся потери, обусловленные гистерезисом и вихревыми токами.
3. Из-за нелинейности цепи ток в катушке при приложенном синусоидальном напряжении будет несинусоидальным, и, наоборот, при синусоидальном токе напряжение на катушке будет несинусоидальным.

Потери в сердечниках из ферромагнитного материала

Потери энергии в сердечниках при периодическом изменении магнитного потока складываются из потерь на гистерезис и на вихревые токи. Изменяющийся в сердечнике магнитный поток создает в замкнутом контуре, перпендикулярном магнитному потоку ЭДС

$$e = -w \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

под действием которой возникают токи, названные вихревыми. Величина тока тем больше, чем меньше сопротивление контура. Для уменьшения вихревых токов увеличивают сопротивление контура, выполняя сердечник из тонких листов ферромагнитного материала, изолированных друг от друга.

Обратимся к рис. 5.1, на котором показана трубка вихревого тока, имеющая сечение $l dx$ и длину приблизительно $2h$. Активная проводимость вдоль этой трубки обратна его активному сопротивлению. Имеем

$$dg_x = \gamma \frac{l \cdot dx}{2h}$$

Действующее значение ЭДС, индуцируемой вдоль

трубки, равно:

$$E_x = 4k_\phi \cdot f \cdot \Phi_{mx} = 4k_\phi \cdot f \cdot 2x \cdot h \cdot B_m$$

где k_ϕ – коэффициент формы кривой ЭДС.

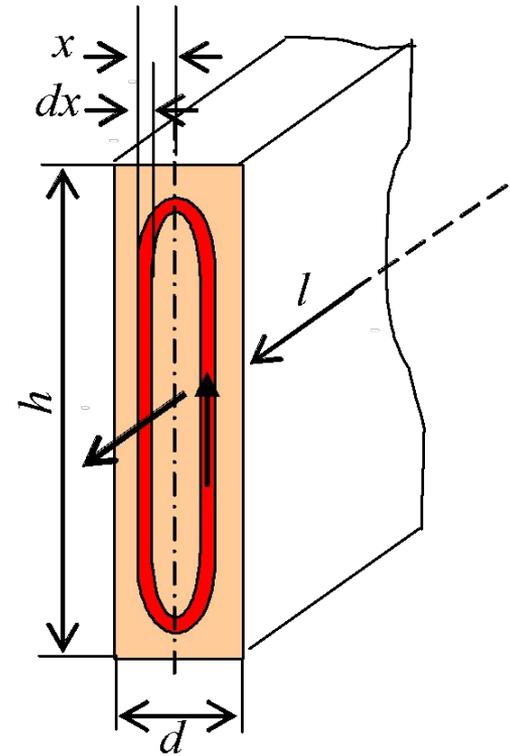


Рис. 5.1. Трубка вихревого тока

Следовательно, потери внутри трубки равны

$$dP = E_x^2 \cdot dg_x = 32h \cdot l \cdot \gamma \cdot k_{\phi}^2 \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot x^2 dx$$

Интегрируя от 0 до $d/2$, получаем потери на вихревые токи в листе:

$$P_v = \frac{4}{3} \gamma \cdot k_{\phi}^2 \cdot d^2 \cdot f^2 \cdot B_m^2 \cdot V$$

где $V = h \cdot l \cdot d$ — объем листа.

Потери на гистерезис появляются при перемагничивании ферромагнитного вещества.

Предположим, что намагничиваемое тело из ферромагнитного вещества имеет форму тонкого кольца, длина которого l и поперечное сечение s . Кольцо намагничивается током i в обмотке, имеющей w витков, равномерно расположенных по длине кольца.

Элементарная работа внешнего источника ЭДС, связанная с изменением $d\Psi$ потокосцепления $\Psi = w\Phi$ с обмоткой

$$dA = i \cdot \frac{d\Psi}{dt} dt = i \cdot d\Psi = i \cdot w \cdot d\Phi$$

Отнесенная к единице объема, эта работа равна:

$$dA' = \frac{dA}{l \cdot s} = \frac{i \cdot w}{l} \cdot d\left(\frac{\Phi}{s}\right) = H \cdot dB$$

Проинтегрировав последнее выражение по петле гистерезиса, получим

$$A' = W_{\Gamma}' = \oint H \cdot dB = s \cdot m_H \cdot m_B$$

где m_H и m_B – масштабы по оси H и оси B .

Работа \mathbf{A}' идет на необратимые процессы, связанные с перемагничиванием вещества.

Приближенно для определения удельных потерь на гистерезис можно воспользоваться формулой:

$$\mathbf{W}_\Gamma = \eta \cdot \mathbf{B}_m^2$$

где \mathbf{B}_m – амплитуда магнитной индукции, η – коэффициент, зависящий от свойств материала сердечника – коэффициент, зависящий от свойств материала сердечника.

Таким образом, суммарная мощность потерь в сердечнике равна

$$\mathbf{P}_{\text{фер}} = \mathbf{P}_\Gamma + \mathbf{P}_\text{в} = \eta \cdot \mathbf{f} \cdot \mathbf{B}_m^2 \cdot \mathbf{V} + \xi \cdot \mathbf{f}^2 \cdot \mathbf{B}_m^2 \cdot \mathbf{V}$$

Связь напряжения, приложенного к катушке, с током в ней

Примем сначала некоторые допущения:

- пренебрежем активным сопротивлением провода катушки;
- предположим, что отсутствуют потери в стали (отсутствует петля гистерезиса);
- пренебрежем потокоцеплением рассеяния (будем считать, что все витки пронизываются одним и тем же магнитным потоком Φ , проходящем по сердечнику, т.е.

$$\frac{d\Psi}{dt} = w \cdot \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.1)$$

Примем, что напряжение, приложенное к катушке

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad (5.2)$$

При этих условиях напряжение, приложенное к катушке, компенсируется ЭДС самоиндукции, возникающей в ней

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e} = \mathbf{w} \cdot \frac{d\Phi}{dt}$$

и магнитный поток

$$\Phi = \frac{\mathbf{U}_m}{\mathbf{w}} \cdot \int \sin(\omega \cdot t) dt = \frac{\mathbf{U}_m}{\mathbf{w} \cdot \omega} \cos(\omega \cdot t) = \Phi_m \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}) \quad (5.3)$$

Магнитный поток отстает от напряжения на 90^0 , а ЭДС

$$\mathbf{e} = -\mathbf{w} \cdot \frac{d\Phi}{dt} = -\mathbf{w} \cdot \omega \cdot \Phi_m \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}) = \mathbf{E}_m \sin(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2})$$

Из (5.2) и (5.3) следует – **если приложенное напряжение к катушке синусоидальное, то и поток синусоидальный.** (5.2) и (5.3) справедливы только для синусоидального приложенного напряжения. Действующее значение напряжения

$$U = E = \frac{w \cdot \omega \cdot \Phi_m}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f \cdot w \cdot \Phi_m}{\sqrt{2}} = 4,44 \cdot f \cdot w \cdot \Phi_m \quad (5.5)$$

По кривой потока $\Phi(t)$ нетрудно построить кривую тока $i(t)$. Это построение показано на рис. 5.2.

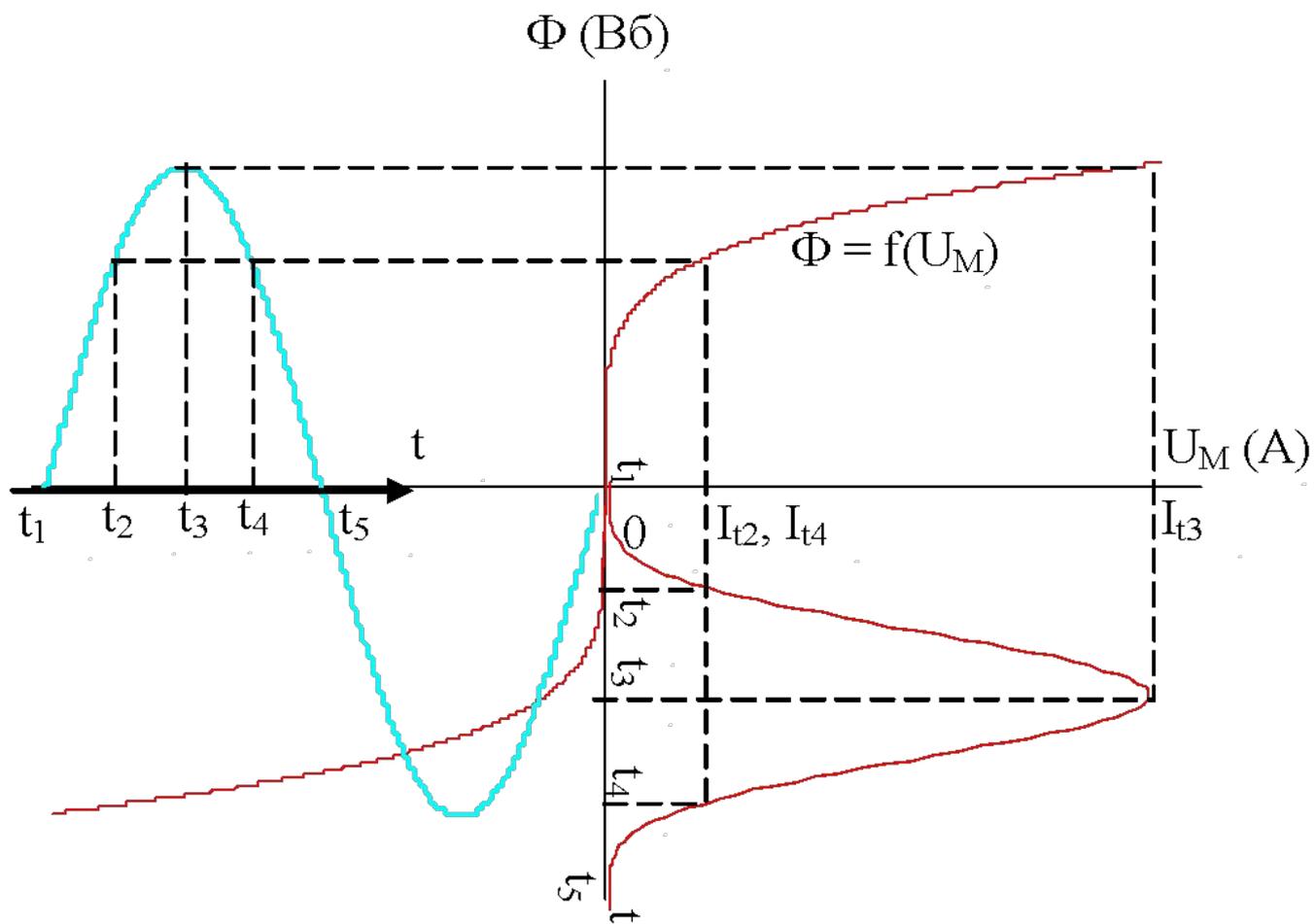


Рис. 5.2. Построение кривой $i(t)$ в зависимости от синусоидального потока

Построение производится по заданной вебер-амперной характеристики магнитной цепи. Чтобы не загромождать рисунок, построение кривой тока $i(t)$ показано только для положительных значений. Полусинусоида потока $\Phi(t)$ изображена слева. Полусинусоида тока направлена по оси времени от нуля вниз. Задаваясь моментами времени t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 , находим значения потоков для этих моментов времени и соответствующих им токов. Зависимость напряжения, потока и тока в катушке со сталью при неучете потерь в стали изображены на рис. 5.3.

В том случае, когда по катушке протекает синусоидальный ток, кривая магнитного потока $u(t)$ получается сплюснутой, как это изображено на рис. 5.4.

Соответственно, напряжение имеет пикообразную форму.

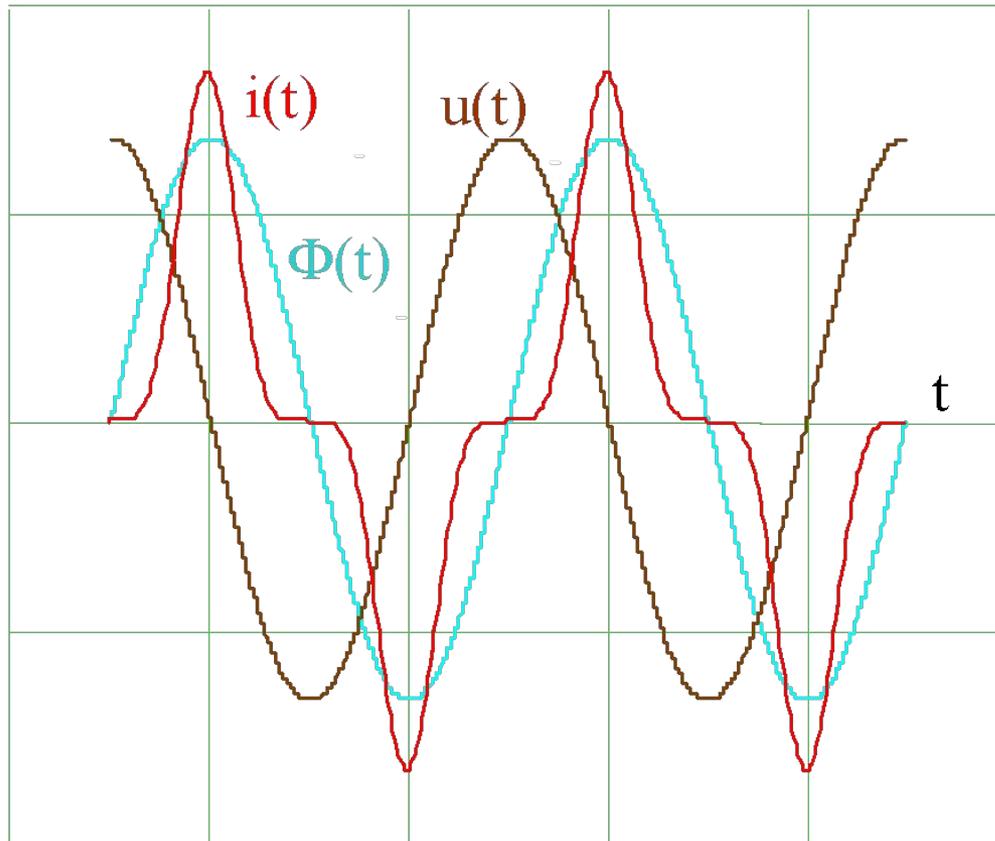


Рис. 5.3. Напряжение, поток и ток в катушке со сталью без учета потерь в стали (напряжение синусоидально).

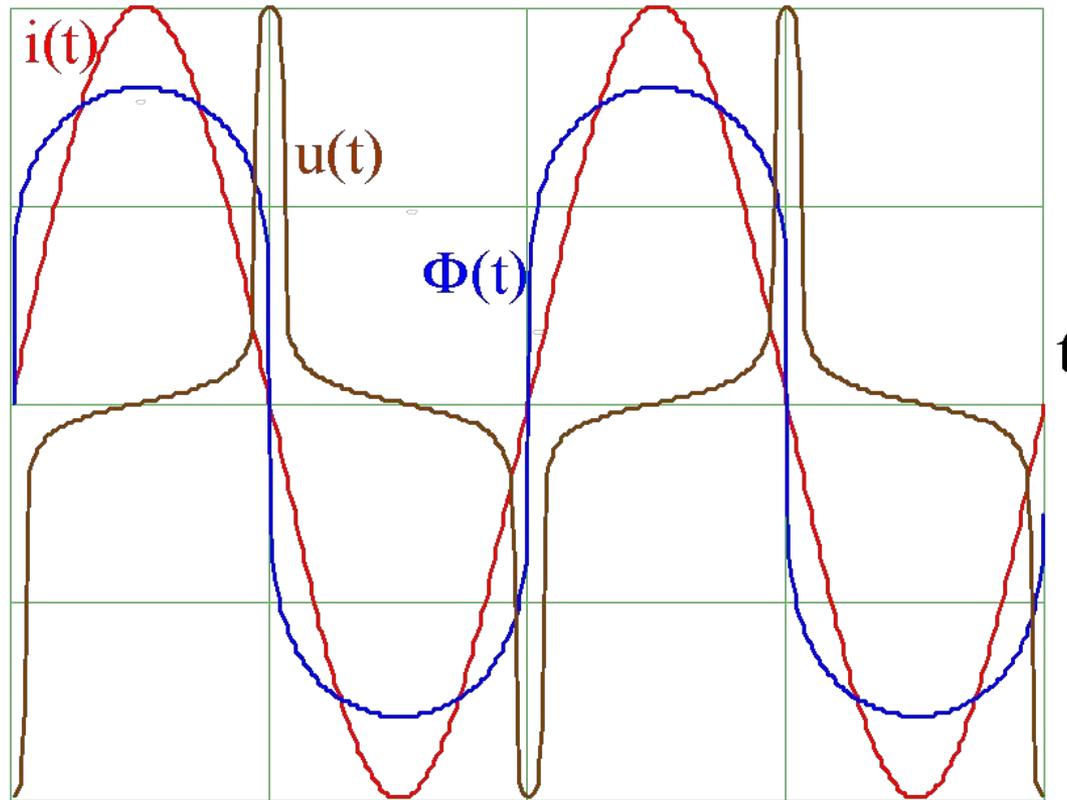


Рис. 5.3 а. Напряжение, поток и ток в катушке со сталью без учета потерь в стали при синусоидальном токе.

Чем больше насыщение стального сердечника, тем сильнее нарушается синусоидальность. Если же индукция в сердечнике невелика, насыщения нет, то кривые близки к синусоидам.

При отсутствии активных потерь в ферромагнитном сердечнике кривые токов, магнитных потоков, ЭДС и напряжений симметричны относительно абсцисс, поэтому содержат только нечетные гармоники.

На рис 5.4. изображены кривая тока при учете гистерезиса, когда приложенное напряжение синусоидально и, следовательно синусоидальный магнитный поток.

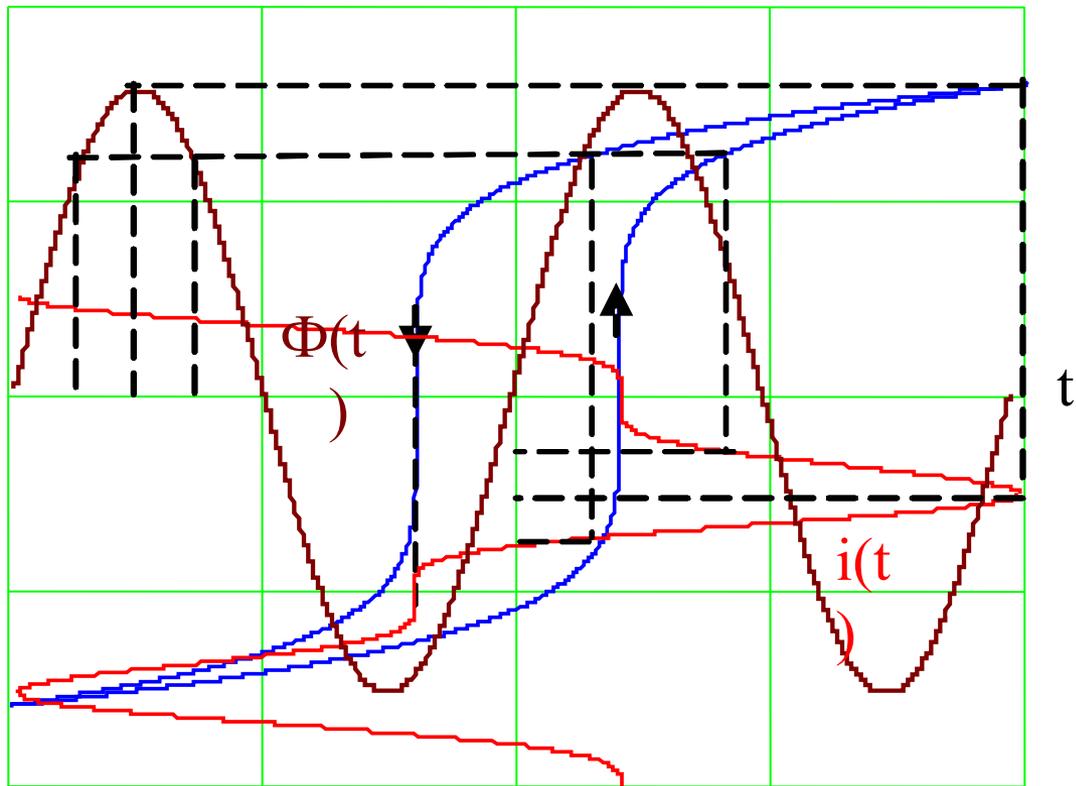


Рис. 5.4. Построение кривой тока в катушке со сталью при синусоидальном магнитном потоке с учета потерь в стали.

Построение проводится также как и предыдущие с тем различием, что в моменты времени t_1 , t_2 значения тока соответствуют восходящей части кривой вебер-амперной характеристики, а в моменты времени t_4 , t_5 – нисходящей.

Зависимости приложенного синусоидального напряжения, магнитного потока и тока от времени в катушке со сталью приведены на рис. 5.5.

При синусоидальном токе кривые магнитного потока и напряжения будут аналогичны кривым, приведенным на рис. 5.3, но сдвинуты вправо относительно синусоиды тока. Сдвиг определяется площадью петли гистерезиса

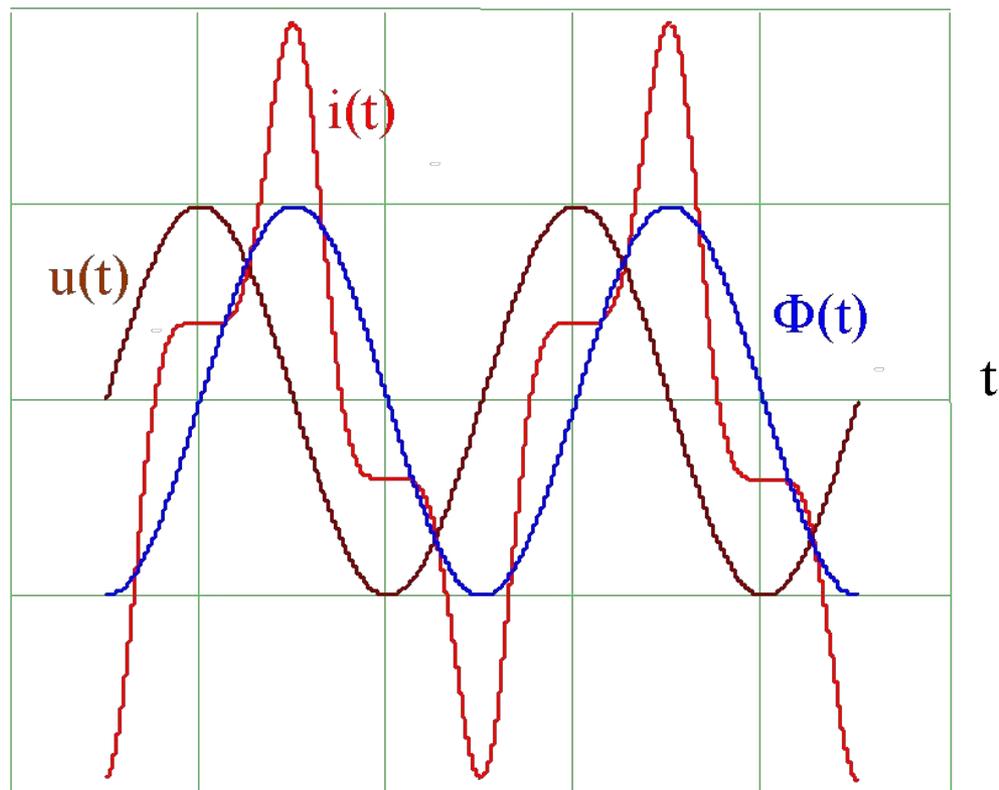


Рис. 5.5. Синусоидальное напряжение, магнитный поток и ток в катушке со сталью при учете гистерезиса.

Замена нелинейных индуктивностей эквивалентными линейными

Часто нелинейную цепь заменяют эквивалентной линейной, если нелинейности выражены достаточно слабо. В тех случаях, когда форма кривых не представляет интереса, можно воспользоваться методом, основанным на замене действительных несинусоидальных кривых тока и напряжения эквивалентными синусоидальными. Этот метод назван *методом эквивалентных синусоид*.

Замена несинусоидальных токов и напряжений синусоидальными позволяет пользоваться уравнениями в комплексной форме записи, применять для расчетов все известные методы расчета электрических цепей, пользоваться векторными диаграммами.

Выбор эквивалентных синусоид тока и напряжения осуществляют так, чтобы активная мощность в цепи оставалась неизменной. В этих условиях при синусоидальных приложенных напряжениях эквивалентными синусоидами тока должны быть их первые гармоники. И напротив, при синусоидальных протекающих токах эквивалентными должны быть первые гармоники напряжения.

Рассмотрим катушку со сталью, в которой пренебрежем поточосцеплениями рассеяния и активным сопротивлением проводника катушки.

Связь между эквивалентными синусоидами тока и напряжения и угла между ними определяется из условия сохранения потерь в сердечнике, т.е.

$$UI \cdot \cos \varphi = P_{\Gamma} + P_{\text{В}} \quad (5.6)$$

Замена действительных кривых тока эквивалентными синусоидами приводит к тому, что действительная петля гистерезиса вебер-амперной характеристики заменяется эллипсовидной, равной площади. При воздействии синусоидального напряжения в эллипсовидной характеристике сохраняется максимальное потокосцепление (рис. 5.6 а), при синусоидальном напряжении остается неизменной амплитуда тока (рис. 5.6. б).

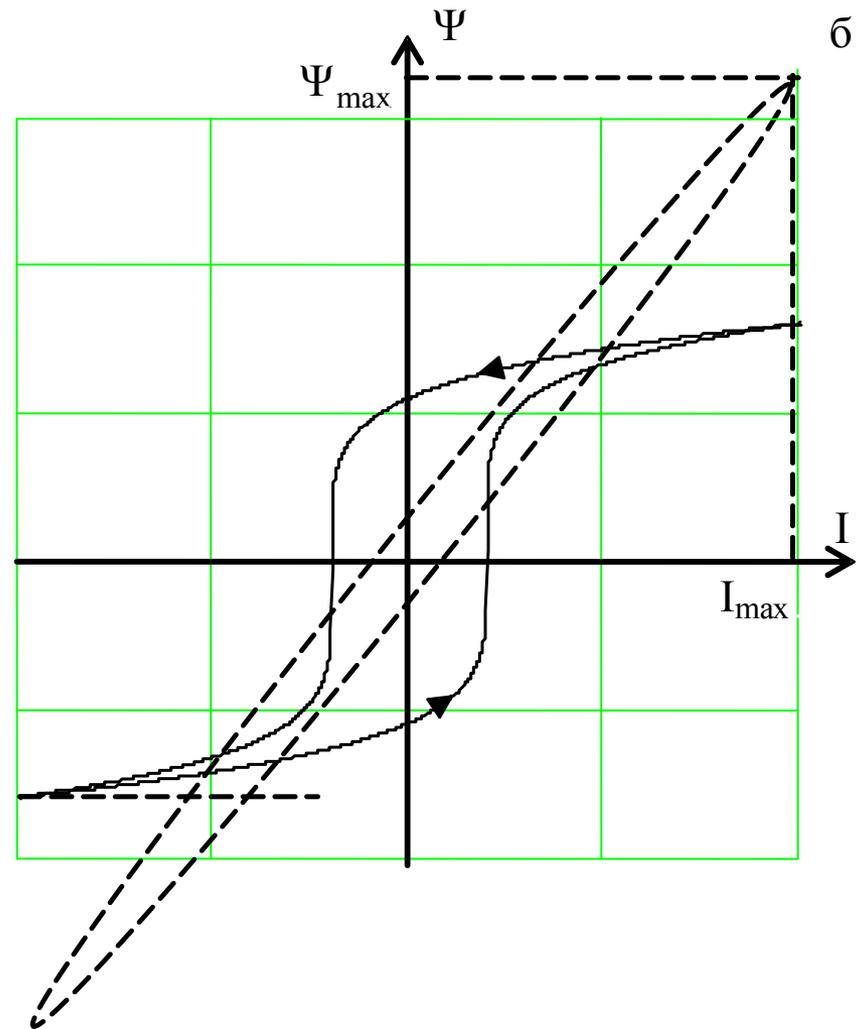
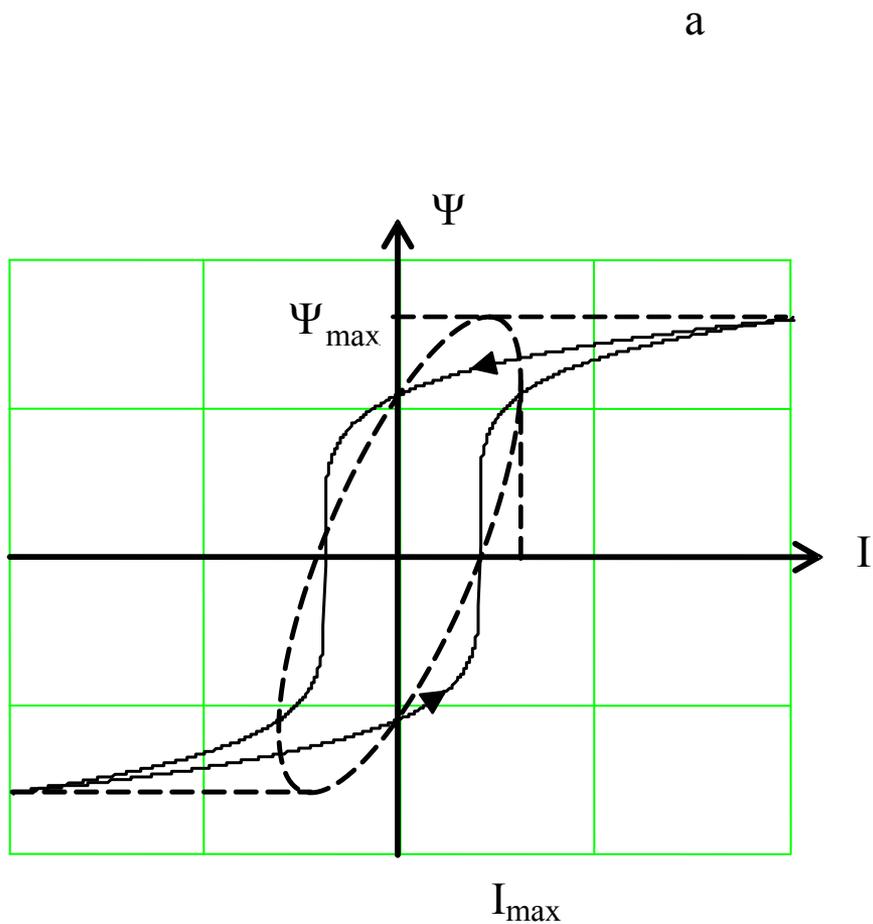


Рис. 5.6. К замене действительных кривых тока и напряжения в катушке со сталью эквивалентными синусоидами: а – при синусоидальном напряжении; б - при синусоидальном токе.

Уравнения, векторная диаграмма и эквивалентная схема замещения катушки со сталью

Рассмотрим катушку на магнитопроводе из ферромагнитного сердечнике. (рис. 5.7 а). Будем считать, что весь магнитный поток замыкается внутри сердечника, т.е. отсутствует рассеяние. Пренебрежем также активным сопротивлением провода катушки. При данных допущениях

$$\mathbf{u} = - \mathbf{e} = \frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{w} \frac{d\Phi_0}{dt} = \mathbf{u}_0 \quad (5.7)$$

Это уравнение нелинейное. Заменяя несинусоидальные кривые тока (напряжения и потока), получаем:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{jw} \cdot \hat{\Phi}_0 = \hat{\mathbf{U}}_0 \quad (5.8)$$

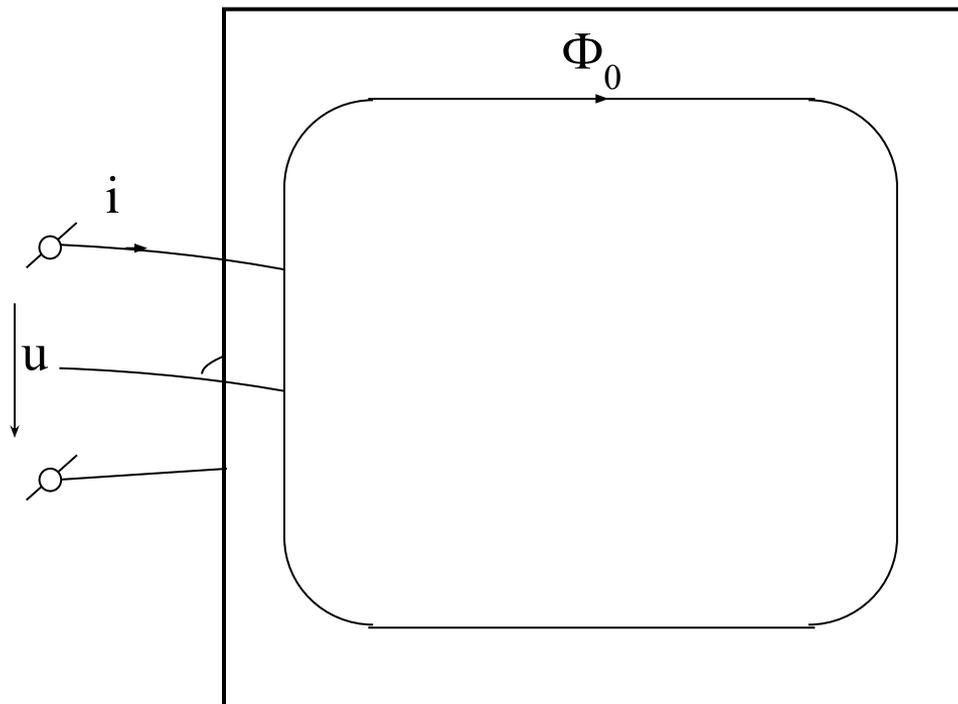


Рис. 5.7 а Катушка на сердечнике из ферромагнитного материала

Потоку Φ_0 согласно вебер-амперной характеристике соответствует ток, который называется током намагничивания. Ток намагничивания совпадает по направлению с потоком Φ_0 . Наличие петли гистерезиса и вихревых токов создают потери в магнитопроводе, которые обуславливают активную составляющую тока. Эта составляющая тока совпадает по направлению с приложенным напряжением. Векторная диаграмма описанных величин приведена на рис. 5.7 б.

Схема замещения катушки, соответствующая построенной векторной диаграмме, приведена на рис. 5.7 в. Она представлена двумя параллельно включенными сопротивлениями – активным r_0 и нелинейным индуктивным x_0 .

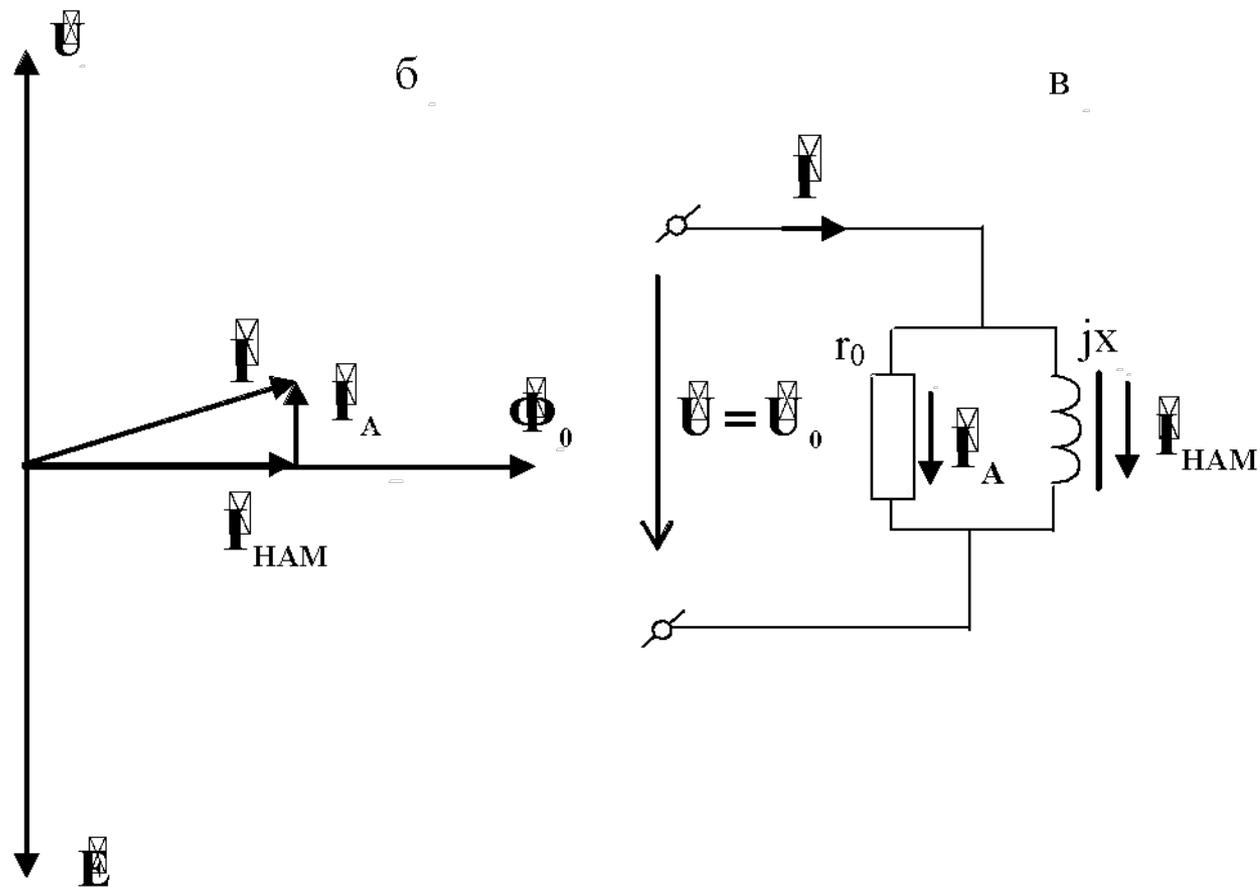


Рис. 5.7. Векторная диаграмма токов, напряжения и магнитного потока (б);
схема замещения (в);
(не учитываются активное сопротивление провода и потокосцепление рассеяния)

Рассмотрим общий случай. Во-первых, в реальной катушке имеет место активное сопротивление провода, во-вторых, кроме основного потокосцепления, замыкающегося по ферромагнитному сердечнику присутствует также потокосцепление рассеяния Ψ_{σ} , замыкающееся вокруг витков по воздуху (рис. 5.8 а). Оно пропорционально току и может быть выражено как

$$\Psi_{\sigma} = L_{\sigma} i$$

Общее потокосцепление, пронизывающее витки обмотки, равно:

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_{\sigma} = w \Phi_0 + L_{\sigma} i \quad (5.9)$$

а

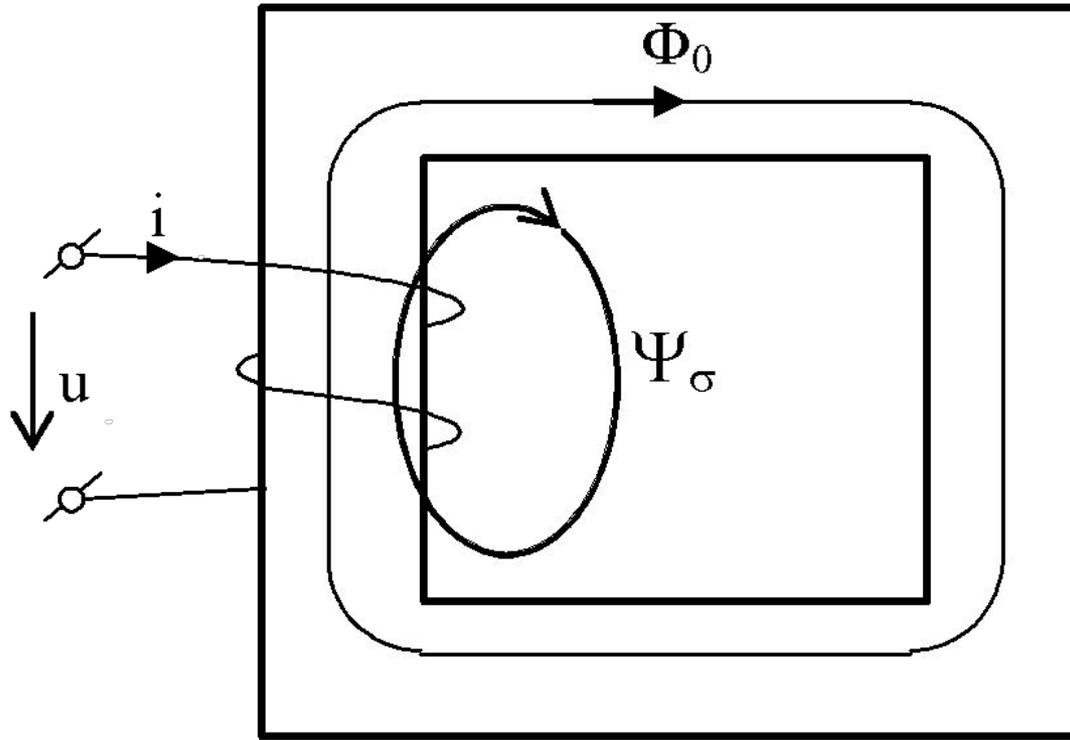


Рис. 5.8 а Катушка на сердечнике из ферромагнитного материала

Связь приложенного к катушке напряжения с потокоцеплением выразится уравнением:

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{i} + L \frac{d\mathbf{i}}{dt} + w \frac{d\Phi_0}{dt} \quad (5.10)$$

При допущении, что токи и напряжения в цепи синусоидальны, с учетом (5.7) получим:

$$\mathbf{U} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{I} + j\omega L_{\sigma} \mathbf{I} + \mathbf{U}_0 \quad (5.11)$$

В уравнении (5.11) по сравнению с уравнением (5.8) добавились два слагаемых, соответствующих падению напряжения на активном сопротивлении катушки и индуктивности рассеяния. Векторная диаграмма и схема замещения катушки со сталью, согласно уравнению (5.11), приведены на рис. 5.8 б и 5.8 в.

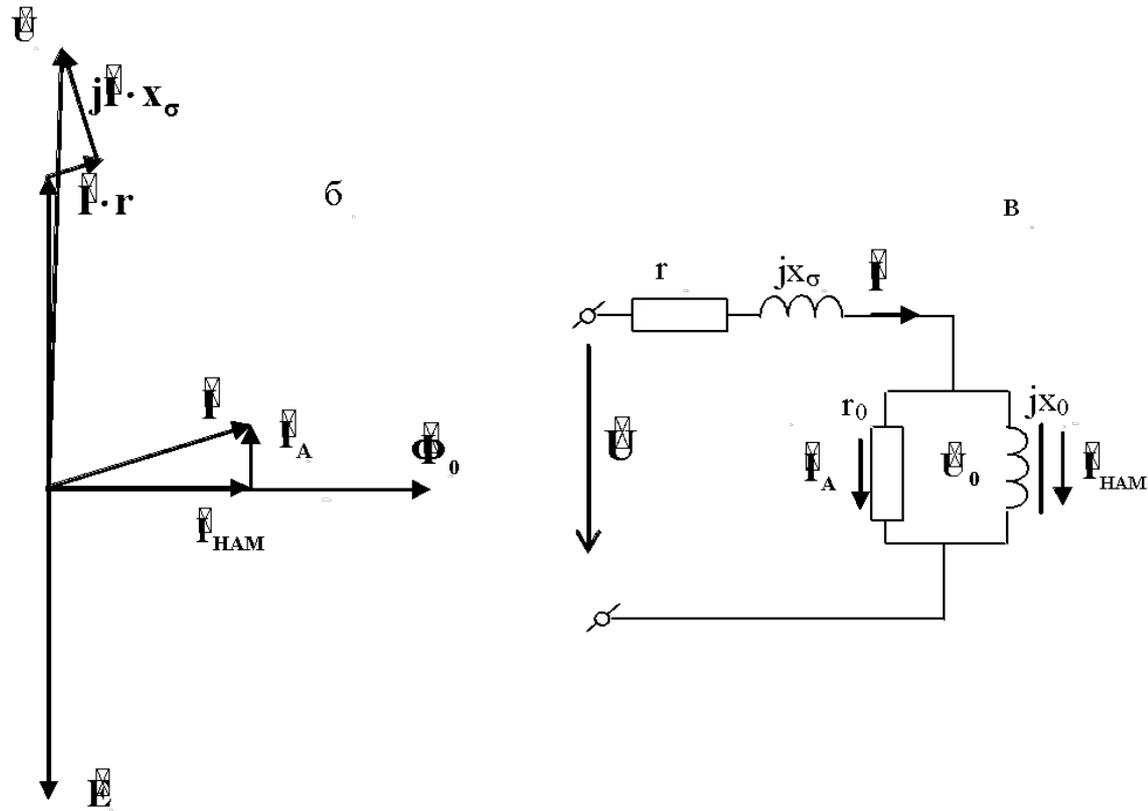


Рис. 5.8. Векторная диаграмма токов, напряжения и магнитного потока реальной катушки (а); схема замещения (б)

Уравнения, векторная диаграмма и схема замещения трансформатора с ферромагнитным сердечником

Рассмотрим трансформатор с двумя обмотками, имеющими число витков w_1 и w_2 . Обмотку с числом витков w_1 будем считать первичной, к ней приложено напряжение u_1 , а обмотку с числом витков w_2 – вторичной, к ней подключена нагрузка. Картина магнитного поля в трансформаторе достаточно сложна. Есть потоки, охватывающие обе обмотки, есть сцепленные с одним или несколькими витками одной обмотки. Есть потоки, сцепленные со всеми витками одной обмотки. Но с большой степенью, удовлетворяющей соотношениям, связывающим электрические параметры, картину магнитного поля можно привести к изображенной на рис. 5.9. Линии потока Φ_0 охватывают все витки обеих обмоток. Поток Φ_0 называется **основным**. Кроме него имеются потоки, замыкающиеся по воздуху и охватывающие только одну обмотку.

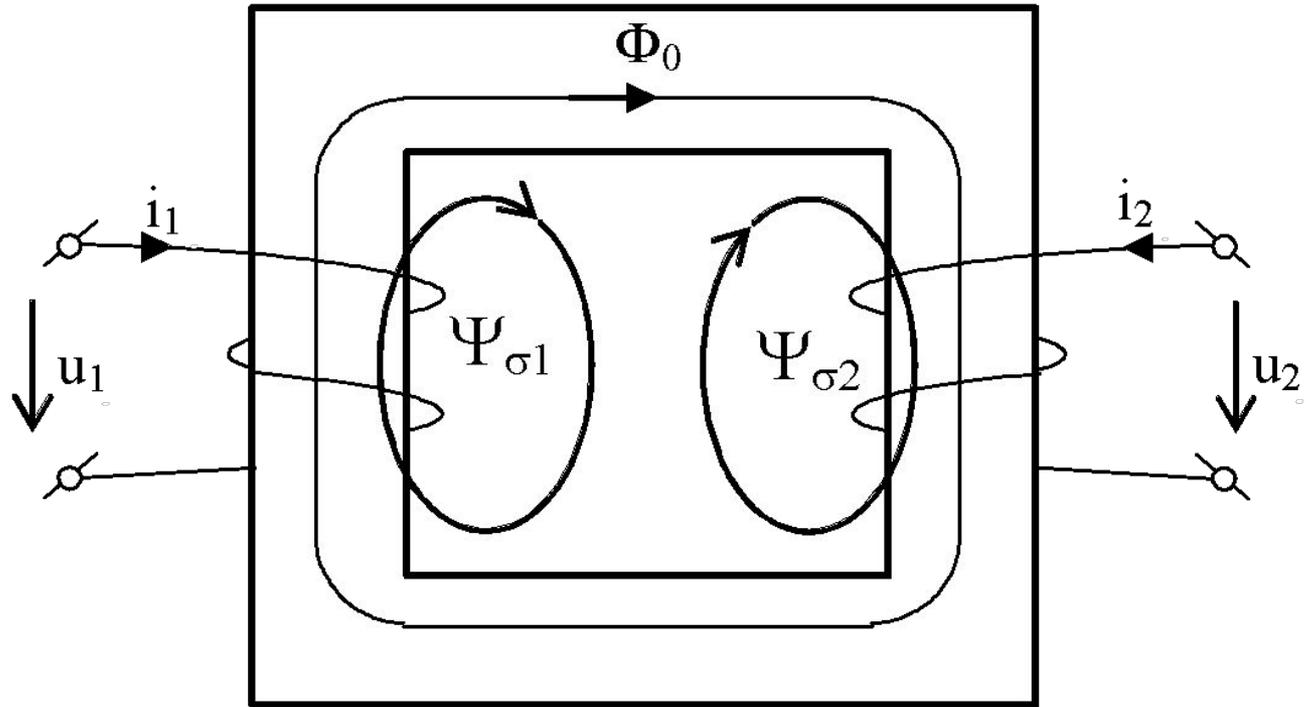


Рис. 5.9. Катушка на сердечнике из ферромагнитного материала.

Все потоки, охватывающие первичную обмотку, образуют потокосцепление $\Psi_{\sigma 1}$, названное **потокосцеплением рассеяния первичной обмотки**. Потокосцепление $\Psi_{\sigma 2}$ – **потокосцепление рассеяния вторичной обмотки**. Поток Φ_0 нелинейно связан с магнитодвижущей силой $F = i_1 w_1 + i_2 w_2$, определяемой обоими токами. Потокосцепления $\Psi_{\sigma 1}$ и $\Psi_{\sigma 2}$ замыкаются по воздуху и, следовательно, линейно соответственно зависят от токов i_1 и i_2 :

$$\begin{aligned}\Psi_{\sigma 1} &= L_{\sigma 1} i_1 \\ \Psi_{\sigma 2} &= L_{\sigma 2} i_2\end{aligned}\quad (5.12)$$

Для потокосцеплений Ψ_1 с первичной обмоткой и Ψ_2 с вторичной обмоткой можно написать:

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= \Psi_{\sigma 1} + \Psi_{01} = L_{\sigma 1} i_1 + w_1 \Phi_0 \\ \Psi_2 &= \Psi_{\sigma 2} + \Psi_{02} = L_{\sigma 2} i_2 + w_2 \Phi_0\end{aligned}\quad (5.13)$$

Здесь $L_{\sigma 1}$ и $L_{\sigma 2}$ – индуктивности рассеяния соответственно первичной и вторичной обмоток.

Приложим к первичной обмотке напряжение u_1 , а к зажимам вторичной обмотке подключим сопротивление нагрузки.

Напряжение u_1 уравнивается суммой падения напряжения на активном сопротивлении первичной обмотки и ЭДС

самоиндукции

$$e_1 = -L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} - w_2 \frac{d\Phi_0}{dt},$$

индуцируемой потокосцеплением Ψ_1 :

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Psi_1}{dt} = r_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + u_0 - w_2 \frac{d\Phi_0}{dt} \quad (5.14)$$

ЭДС e_2 , равная , индуцируемая потоком Φ_0 во

вторичной обмотке, равна сумме падений напряжений во

вторичной обмотке от тока i_2 и напряжения u_2 на зажимах

вторичной обмотки:

$$e_2 = r_2 i_2 + L_{\sigma 2} \frac{di_2}{dt} + u_2 \quad (5.15)$$

Уравнения трансформатора нелинейны вследствие нелинейной зависимости между потоком Φ_0 и МДС F . Поэтому периодические токи, магнитные потоки и напряжения несинусоидальны. Заменяя их эквивалентными синусоидами, запишем уравнения (5.14) и (5.15) в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{U}}_1 &= r_1 \cdot \underline{\dot{I}}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \underline{\dot{I}}_1 + \underline{\dot{U}}_0 \\ \underline{\dot{E}}_2 &= r_2 \cdot \underline{\dot{I}}_2 + j\omega L_{\sigma 2} \underline{\dot{I}}_2 + \underline{\dot{U}}_2\end{aligned}\quad (5.16)$$

В общем случае количество витков w_1 и w_2 отличаются друг от друга, соответственно отличаются напряжения u_0 и ЭДС e_2 . Преобразуем уравнения (5.16) так, чтобы напряжение u_0 было равно по величине ЭДС самоиндукции вторичной обмотки. Эти преобразования называются приведением всех величин во вторичной обмотке к первичной обмотке. Приведенные величины будем снабжать штрихами.

Приведение осуществляют, заменяя реальный трансформатор с числом витков w_2 во вторичной обмотке эквивалентным с числом витков $w'_2 = w_1$. Таким образом вместо реального трансформатора с коэффициентом

трансформации $k_T = \frac{w_1}{w_2}$ имеем ему эквивалентный с

коэффициентом трансформации, равным единице.

Условием эквивалентности является сохранение картины магнитного поля трансформатора. Это условие соблюдается если МДС трансформатора остается без изменения. Т.е.,

$$i_1 w_1 + i_2 w_2 = i_1 w_1 + i'_2 w'_2 \quad (5.17)$$

Следовательно $i'_2 = \frac{w_2}{w_1} i_2$

Так как поток при этом не изменяется, то ЭДС во вторичной обмотке изменяется пропорционально числу витков

$$\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_2} \mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_T \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 = -\mathbf{u}_0 \quad (5.18)$$

Очевидно, что все падения напряжений во вторичной цепи должны быть пересчитаны пропорционально коэффициенту трансформации \mathbf{k}_T . Сопротивления самой вторичной обмотки и все, подключенные к ней, пересчитываются пропорционально квадрату \mathbf{k}_T . Действительно:

$$\underline{\mathbf{Z}}'_2 = \left(\frac{\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_2} \right)^2 \cdot \frac{\mathbf{U}_2}{\mathbf{I}_2} = \mathbf{k}_{TP}^2 \underline{\mathbf{Z}}_2$$

После приведения уравнения трансформатора запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\underline{\dot{U}}_1 &= r_1 \cdot \underline{\dot{I}}_1 + j\omega L_{\sigma 1} \underline{\dot{I}}_1 + \underline{\dot{U}}_0 \\ \underline{\dot{U}}'_2 &= r'_2 \cdot \underline{\dot{I}}'_2 + j\omega L'_{\sigma 2} \underline{\dot{I}}'_2 + \underline{\dot{U}}'_2\end{aligned}$$

где $\underline{\dot{U}}'_2 = \underline{Z}'_2 \underline{\dot{I}}'_2$

Связь между комплексной амплитудой потока $\underline{\dot{\Phi}}_0$ и МДС F в комплексной форме запишется как:

$$\underline{\dot{\Phi}}_0 = \frac{\underline{\dot{I}}_1 w_1 + \underline{\dot{I}}_2 w_2}{\underline{Z}_M} = \frac{(\underline{\dot{I}}_1 + \underline{\dot{I}}'_2) \cdot w_1}{\underline{Z}_M} = \frac{\underline{\dot{I}}_0 w_1}{\underline{Z}_M}$$

где \underline{Z}_M — комплекс магнитного сопротивления сердечника, учитывающий потери на гистерезис и вихревые токи.

Величину $\underline{\dot{I}}_0$ называют **намагничивающим током**, который протекает под действием напряжения $\underline{\dot{U}}_0$. Заметим, что $\underline{\dot{I}}_0$ является в общем случае при $\underline{\dot{I}}_1 \neq 0$ и $\underline{\dot{I}}'_2 \neq 0$ только расчетной величиной. Он равен току $\underline{\dot{I}}_1$, если $\underline{\dot{I}}'_2 = 0$

Уравнение $\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}'_2$ является первым законом Кирхгофа.

С учетом этого и (5.18) можно предложить схему замещения трансформатора, изображенную на рис. 5.10 а. Векторная диаграмма, соответствующая схеме замещения, приведена на рис. 5.10 б.

В эквивалентной схеме можно принять $\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{L}_{\sigma 2} = \mathbf{L}'_{\sigma 2}$.

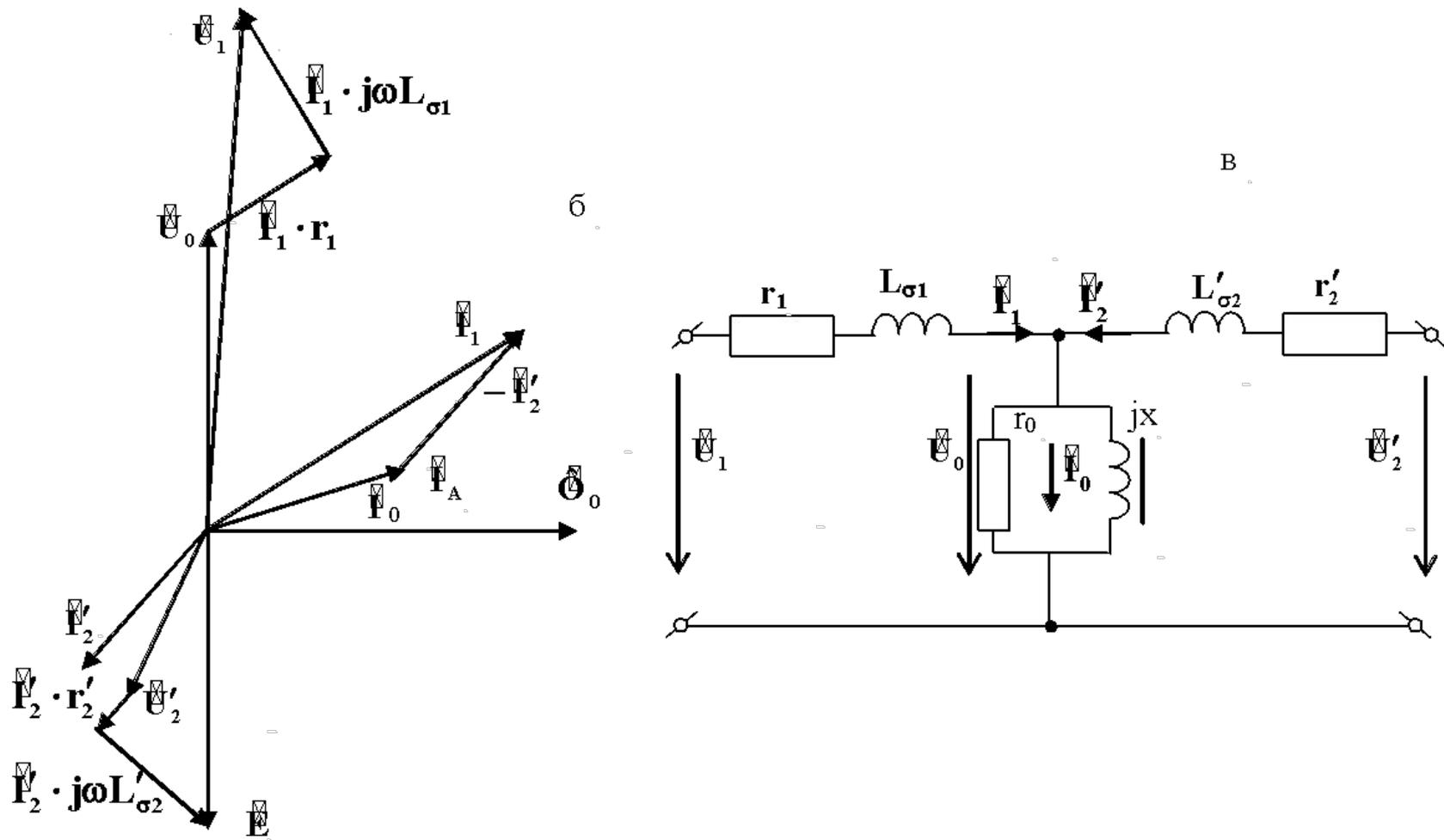


Рис. 5.9. Схема замещения трансформатора(а), векторная диаграмма токов, напряжения и магнитного потока (б);