



# Симплекс-метод решения ЗЛП

# Содержание

1. Определение K-матрицы в КЗЛП
2. Переход от одной K-матрицы КЗЛП к другой K-матрице
3. Симплекс-разность K-матрицы КЗЛП
4. Способ построения опорного плана, более близкого к оптимальному
5. Критерий оптимальности опорного плана
6. Критерий отсутствия конечного решения
7. Алгоритм симплекс-метода
8. Пример 1
9. Пример 2

# Симплекс-метод решения ЗЛП

Пусть требуется решить задачу

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

$$x_j \geq 0 \quad , \quad j = \overline{1, n} \quad , \quad b_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1, m}$$

Или

$$f(x) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0} \quad , \quad \bar{b} \geq \bar{0}$$

(2)

Так как решением задачи (2) является крайняя точка множества  $P$  ее допустимых решений, или, что то же самое, неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений  $Ax = \bar{b}$ , то метод решения задачи (1) должен содержать **4 момента**:

- 1) обоснование способа перехода от одного опорного плана (К-матрицы) к другому;
- 2) указание признака оптимальности, позволяющего проверить, является ли данный опорный план оптимальным;
- 3) указание способа построения нового опорного плана, более близкого к оптимальному;
- 4) указание признака отсутствия конечного решения.

# Определение K-матрицы в КЗЛП

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП):

$$f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \rightarrow \max$$

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

$$\bar{x} \geq \bar{0}, \quad \bar{b} \geq \bar{0}.$$

Будем считать, что ранг матрицы  $A$  равен  $m$ , причем  $m < n$ .

Запишем КЗЛП в векторном виде:  $\max(\bar{c}, \bar{x})$

$$(*) \quad \sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j = \bar{b}$$

где  $\bar{a}_j$  –  $j$ -й столбец матрицы  $A$ .

Дадим одно из определений опорного плана. ОП ЗЛП будем называть такой план  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , что векторы  $\bar{a}_j$ , входящие в разложение со строго положительными  $x_j$ , линейно независимы.

$K$ -матрицей КЗЛП будем называть расширенную матрицу системы линейных уравнений, равносильной системе (\*), содержащую единичную подматрицу на месте первых  $n$  своих столбцов и все элементы  $(n+1)$ -го которой неотрицательны. Число  $K$ -матриц конечно и не превышает  $C_n^m$ . Каждая  $K$ -матрица определяет ОП КЗЛП и наоборот.

# Переход от одной K-матрицы ЗЛП к другой K-матрице.

Пусть известна K-матрица

$$K^{(S)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & a_{12}^{(S)} & \textcircled{3} & a_{1n}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ a_{21}^{(S)} & a_{22}^{(S)} & \dots & a_{2n}^{(S)} & b_2^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & a_{m2}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix}$$

Обозначим через  $\overline{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, \dots, N_m^{(S)})$  вектор номеров базисных (единичных) столбцов матрицы  $K^{(S)}$ ,  $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = (b_1^{(S)}, \dots, b_m^{(S)})$  - вектор, компоненты которого есть базисные компоненты опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , и могут быть отличны от нуля.

Остальные  $(n - m)$  компонент опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , равны нулю. Очевидно, что векторы  $\bar{N}^{(S)}$  и  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}}$  полностью задают опорный план, определяемый матрицей  $K^{(S)}$ .  
 Например, пусть:

$$K^{(S)} = \left( \begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 8 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

тогда  $\bar{N}^{(S)} = (3,1,6)$ ;  $\bar{X}_{\bar{N}^{(S)}} = \bar{b}^{(S)} = (1,2,4)$  и, следовательно, опорный план, определяемый  $K^{(S)}$ , имеет вид:

$$\bar{X} = (2,0,1,0,0,4)$$

Итак, пусть  $K$ -матрица (3) определяет невырожденный опорный план  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)} = (b_1^{(S)}, \dots, b_m^{(S)})$

$$\bar{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, \dots, N_m^{(S)})$$

Выберем в матрице  $K^{(S)}$  столбец  $\bar{a}_k^{(S)}$ , не принадлежащий единичной подматрице, т. е.  $K \neq N_i^{(S)}$ ,  $i = 1, m$ , и такой, что в этом столбце есть хотя бы один элемент больше нуля.

Пусть  $a_{lk}^{(S)} > 0$ . Считая  $a_{lk}^{(S)}$  направляющим элементом, совершим над матрицей  $K^{(S)}$  один шаг метода Жордана - Гаусса. В результате получим новую матрицу

$$K^{(S+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S+1)} & a_{12}^{(S+1)} & \dots & a_{1n}^{(S+1)} & b_1^{(S+1)} \\ a_{21}^{(S+1)} & a_{22}^{(S+1)} & \dots & a_{2n}^{(S+1)} & b_2^{(S+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S+1)} & a_{m2}^{(S+1)} & \dots & a_{mn}^{(S+1)} & b_m^{(S+1)} \end{pmatrix}$$

в которой  $\bar{a}_k^{(S)}$  стал единичным, но которая может и не быть  $K$ -матрицей, т.к. среди величин  $b_i^{(S+1)}$  могут быть отрицательные.



## Теорема 1.

Пусть в каком-либо столбце  $K$ -матрицы  $K^{(S)}$   $a_{lk}^{(S)}$  есть хотя бы один строго положительный элемент ( $K \neq N_i^{(S)}, i = \overline{1, m}$ ). Тогда с помощью одного шага метода Жордана-Гаусса можно построить новую  $K$ -матрицу  $K^{(S+1)}$ , выбрав направляющий элемент из условия

$$\frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} = \min_{a_{ik}^{(S)} > 0, i=1, m} \frac{b_i^{(S)}}{a_{ik}^{(S)}} = \theta^{(S)}$$

# Симплекс-разность K-матриц ЗЛП. Изменение функции $f(\bar{x})$ при переходе от одной K-матрицы к другой.

## Определение.

Величину

$$\Delta_j^{(S)} = (\bar{C}_{\bar{N}}^{(S)}, \bar{a}_j^{(S)}) - C_j$$

где  $\bar{C}_{\bar{N}}^{(S)}$  - вектор, компонентами которого являются коэффициенты линейной функции  $f(\bar{x})$  при независимых ( $\bar{N}$ ) переменных опорного плана, определяемого матрицей  $K^{(S)}$ , назовем j-й симплекс - разностью матрицы  $K^{(S)}$ .

Пусть  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}$  и  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}$  - опорные планы, определяемые матрицами  $K^{(S)}$  и  $K^{(S+1)}$  соответственно. Тогда очевидно, что

$$f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}) = (\bar{C}_{\bar{N}}^{(S+1)}, \bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}) ; f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}) = (\bar{C}_{\bar{N}}^{(S)}, \bar{X}_{\bar{N}}^{(S)})$$

и

$$f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}) = f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}) - \theta^{(S)} \cdot \Delta_k^{(S)} = f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}) - \frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} \Delta_k^{(S)}$$

где  $k$ -номер столбца  $a_k^{(S)}$ , вводимого в базис при получении

матрицы  $K^{(S+1)}$  из  $K^{(S)}$

Способ построения опорного плана  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}$  (матрицы  $K^{(S+1)}$ ),  
более близкого к оптимальному, чем  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}$

## Теорема 2.

Пусть в матрице  $K^{(S)}$  есть  $\Delta_k^{(S)} \leq 0$  в столбце  $a_k^{(S)}$

(  $K \neq N_i^{(S)}$  ,  $i = \overline{1, m}$  ) есть хотя бы один строго положительный элемент.

Тогда от матрицы  $K^{(S)}$  можно перейти к матрице  $K^{(S+1)}$  , причем

$$f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S+1)}) \geq f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)})$$

## Доказательство.

Так как в  $k$ -ом столбце  $K$ -матрицы  $K^{(s)}$  есть строго положительный элемент, то согласно теореме 1 от матрицы  $K^{(s)}$  можно перейти к новой  $K$ -матрице  $K^{(s+1)}$  ЗЛП, выбрав направляющий элемент  $a_{ik}^{(s)}$  из условия (7).

По условию  $\Delta_k^{(s)} < 0$  по построению  $\theta^{(s)} \geq 0$

поэтому из соотношения  $f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s+1)}) = f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)}) - \theta^{(s)} \cdot \Delta_k^{(s)}$

следует  $f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s+1)}) \geq f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)})$   
(ч.т.д.)

Если все опорные планы ЗЛП невырождены, то  $\theta^{(s)} > 0$

$$f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s+1)}) > f(\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)})$$

# Критерий оптимальности опорного плана $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}$

## Теорема 3

Пусть все симплекс - разности матрицы  $K^{(S)}$  неотрицательные. Тогда опорный план  $\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)}$ , определяемый матрицей  $K^{(S)}$ , является оптимальным.

## Доказательство.

По условиям теоремы  
или

$$\Delta_j^{(S)} = (\bar{C}_N^{(S)}, \bar{a}_j^{(S)}) - C_j \geq 0$$

Пусть

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(8)

$$(\bar{C}_N^{(S)}, \bar{a}_j^{(S)}) \geq C_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Произвольный план ЗЛП.

Умножим левую и правую части (8) на  $x_j$ , тогда в силу неотрицательности  $x_j$  получим

$$(\bar{C}_N^{(S)}, \bar{a}_j^{(S)}) x_j \geq C_j x_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (9)$$

Согласно (9) имеем:

$$\begin{aligned} f(\bar{X}) &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left( \bar{C}_N^{(S)}, \bar{a}_j^{(S)} \right) x_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m C_{N_i}^{(S)} a_{ij}^{(S)} x_j = \sum_{i=1}^m C_{N_i}^{(S)} b_i^{(S)} = f(\bar{X}_N^{(S)}) \end{aligned}$$

ИЛИ

$$f(\bar{X}_N^{(S)}) \geq f(\bar{X}) .$$

Что и доказывает теорему.

# Критерий отсутствия конечного решения.

## Теорема 4

Пусть в матрице  $K^{(S)}$  есть  $\Delta^{(S)} < 0$ , и в столбце  $\bar{a}_k^{(S)}$  ( $K \neq N_i^{(S)}$ ,  $i = \overline{1, m}$ ) нет ни одного положительного элемента. Тогда ЗЛП (1) не имеет конечного решения.

## Доказательство.

Пусть  $K$ -я симплекс-разность матрицы  $K^{(S)}$

$$\Delta_K^{(S)} = (\bar{C}_N^{(S)}, \bar{a}_N^{(S)}) - C_K < 0, \quad (10)$$

и все

$$a_{ik}^{(S)} \leq 0, \quad (i = \overline{1, m}, k = \overline{1, 2, \dots, m}).$$

Матрица  $K^{(S)}$  определяет опорный план

$$\bar{X}_N^{(S)} = (b_1^{(S)}, b_2^{(S)}, \dots, b_m^{(S)})$$

$$\bar{N}^{(S)} = (N_1^{(S)}, N_2^{(S)}, \dots, N_m^{(S)}).$$



Рассмотрим вектор

$$\overline{X}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n' \end{pmatrix},$$

у которого

$$x'_{N_1^{(S)}} = b_1^{(S)} - a_{1k}^{(S)} x_k,$$

$$x'_{N_2^{(S)}} = b_2^{(S)} - a_{2k}^{(S)} x_k,$$

$$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$x'_{N_m^{(S)}} = b_m^{(S)} - a_{mk}^{(S)} x_k,$$

$$x_k' = x_k, \quad k \neq N_i^{(S)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

где  $x_k$  -любое положительное число.

Остальные  $n-m+1$  компонент вектора  $\overline{X}'$  положим равными нулю.

В силу условия (11) компоненты вектора  $\overline{X}'$  неотрицательны.

Легко убедиться в том, что компоненты вектора  $\overline{X}'$  удовлетворяют и функциональным ограничениям ЗЛП, т.е. вектор  $\overline{X}'$  - план ЗЛП при

любом положительном  $x_k$ .

Имеем:

$$\begin{aligned}
 f(\bar{X}') &= C_{N_1^{(S)}} \cdot (b_1^{(S)} - a_{1k}^{(S)} x_k) + C_{N_2^{(S)}} \cdot (b_2^{(S)} - a_{2k}^{(S)} x_k) + \dots \\
 &+ C_{N_m^{(S)}} \cdot (b_m^{(S)} - a_{mk}^{(S)} x_k) + C_k x_k = \\
 &= (C_{N_1^{(S)}} b_1^{(S)} + C_{N_2^{(S)}} b_2^{(S)} + \dots + C_{N_m^{(S)}} b_m^{(S)}) - \\
 &- x_k (C_{N_1^{(S)}} a_{1k}^{(S)} + C_{N_2^{(S)}} a_{2k}^{(S)} + \dots + C_{N_m^{(S)}} a_{mk}^{(S)} - C_k)
 \end{aligned}$$

Или окончательно

$$f(\bar{X}') = f(\bar{X}_N^{(S)}) - x_k \Delta_k^{(S)} \quad (12)$$

Т.к.  $\Delta_k^{(S)} \leq 0$ , то из (12) следует, что для любого числа  $M > 0$  всегда можно найти план  $\bar{X}'$  ЗЛП, для которого  $f(\bar{X}') > M$ , т.е. линейная форма  $f(\bar{X})$  не ограничена сверху на множестве планов.  $P'$

Терема доказана.

# Пример 1

- Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max f(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2$$

(1)

$$X_1 + 2X_2 \leq 6,$$

$$2X_1 + X_2 \leq 8,$$

$$-X_1 + X_2 \leq 1,$$

$$X_2 \leq 2, \quad (2)$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

- Приводим систему линейных неравенств (2) к каноническому виду, вводя в каждое неравенство дополнительную переменную  $x_j$ ,  $j = \overline{3,6}$ .

- Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + X_3 &= 6, \\ 2X_1 + X_2 + X_4 &= 8, \\ -X_1 + X_2 + X_5 &= 1, \\ X_2 + X_6 &= 2, \\ X_j &\geq 0, j = \overline{1,6}. \end{aligned} \quad (3)$$

- Целевая функция (1) будет иметь вид

$$F(\bar{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

- Расширенная матрица

$$K^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений (3) является исходной К-матрицей  $K^{(0)}$  ЗЛП, которая определяет исходный опорный план:

$$\bar{X}_{\bar{N}^{(0)}} = (6, 8, 1, 2) \quad \bar{N}^{(0)} = (3, 4, 5, 6)$$

$$\bar{C}_{\bar{N}^{(0)}} = (0, 0, 0, 0)$$

Введём следующие обозначения:

- S-номер итерации
- i-номера строк таблицы
- $\bar{N}$  -номера столбцов, образующих единичную подматрицу
- $\bar{C}_{\bar{N}}$  -коэффициенты целевой функции при столбцах, образующих единичную подматрицу
- $\bar{a}_i$  -соответствуют переменным задачи
- $\bar{X}_{\bar{N}} = \bar{b}$  -сначала содержит правые части системы уравнений , в конце алгоритма - искомые значения переменных
- $\bar{\theta}$  -для вычисления значений  $\theta$

Результаты последовательных итераций симплекс-алгоритма оформим в виде симплекс-таблицы.

S	i	$\bar{N}^{(s)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(s)} = \bar{b}^{(s)}$	3	2	0	0	0	0	$\theta^{(s)}$
					$\bar{a}_1^{-(s)}$	$\bar{a}_2^{-(s)}$	$\bar{a}_3^{-(s)}$	$\bar{a}_4^{-(s)}$	$\bar{a}_5^{-(s)}$	$\bar{a}_6^{-(s)}$	
0	1	3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
	2	4	0	8	<b>2</b>	1	0	1	0	0	<b>4</b>
	3	5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	-
5	$\Delta_j^{(0)}$			F=0	<b>-3</b>	-2	0	0	0	0	k=1 L=2
1	1	3	0	2	0	<b>3/2</b>	1	-1/2	0	0	<b>4/3</b>
	2	1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	0	8
	3	5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	10/3
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	2
5	$\Delta_j^{(1)}$			F=3*4=12	0	<b>-1/2</b>	0	3/2	0	0	k=2 L=1
2	1	2	2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	
	2	1	3	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	
	3	5	0	3	0	0	-1	1	1	0	
	4	6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	
	5	$\Delta_j^{(2)}$			F=38/3	0	0	1/3	2	0	0

- На второй итерации  $S=2$ , все  $\Delta_j^{(2)} \geq 0, j = \overline{1,6}$  следовательно, опорный план  $\overline{X}_{\overline{N}^{(2)}} = (4/3; 10/3; 3; 2/3)$  ;  $\overline{N}^{(2)} = (2, 1, 5, 6)$

определяемый К-матрицей  $K^{(2)}$ , оптимальный,  
 $\overline{X}^* = (10/3; 4/3; 0; 0; 3; 2/3)$

- Оптимальное значение линейной формы равно:

$$\begin{aligned}
 f(\overline{X}^*) &= f(\overline{X}_{\overline{N}^{(2)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(2)}}, \overline{b}^{(2)}) = \\
 &= C_{N_1^{(2)}} b_1^{(2)} + C_{N_2^{(2)}} b_2^{(2)} + C_{N_3^{(2)}} b_3^{(2)} + C_{N_4^{(2)}} b_4^{(2)} = \\
 &= 2 \cdot 4/3 + 3 \cdot 10/3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2/3 = 12 \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$



## Пример 2

- Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max(2X_1 + X_2) \quad (4)$$

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 40 \quad (5)$$

$$X_{1,2} \geq 0$$

- Приводим ЗЛП (4-5) к каноническому виду

$$\max(2X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4)$$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 10 \quad (6)$$

$$X_1 + X_4 = 40$$

$$X_j \geq 0; \quad j = \overline{1,4}$$

Результаты последовательных итераций запишем в симплекс-таблицу.

S	i	$\bar{N}^{(S)}$	$\bar{C}_{\bar{N}}$	$\bar{X}_{\bar{N}}^{(S)} = \bar{b}^{(S)}$	2	1	0	0	$\theta^{(S)}$
					$a_1^{-(S)}$	$a_2^{-(S)}$	$a_3^{-(S)}$	$a_4^{-(S)}$	
0	1	3	0	10	1	-1	1	0	10
	2	4	0	40	1	0	0	1	40
	3	$\Delta_j^{(0)}$		F=0	-2	-1	0	0	
1	1	1	2	10	1	-1	1	0	-
	2	4	0	30	0	1	-1	1	30
	3	$\Delta_j^{(1)}$		F=2*10=20	0	-3	2	0	
2	1	1	2	40	1	0	0	1	-
	2	2	1	30	0	1	-1	1	-
	3	$\Delta_j^{(2)}$		F=2*40+30= =110	0	0	-1	3	

- Из симплекс-таблице при  $S=2$  следует, что согласно шагу 3 симплекс-алгоритма данная ЗЛП не имеет конечного решения, т.к. отрицательная симплекс-разность  $\Delta_3^{(2)}$  соответствует столбцу  $\bar{a}_3^{(2)}$ , все элементы которого неположительны.
- Итак,

$$\max_P f(\bar{X}) = \infty$$