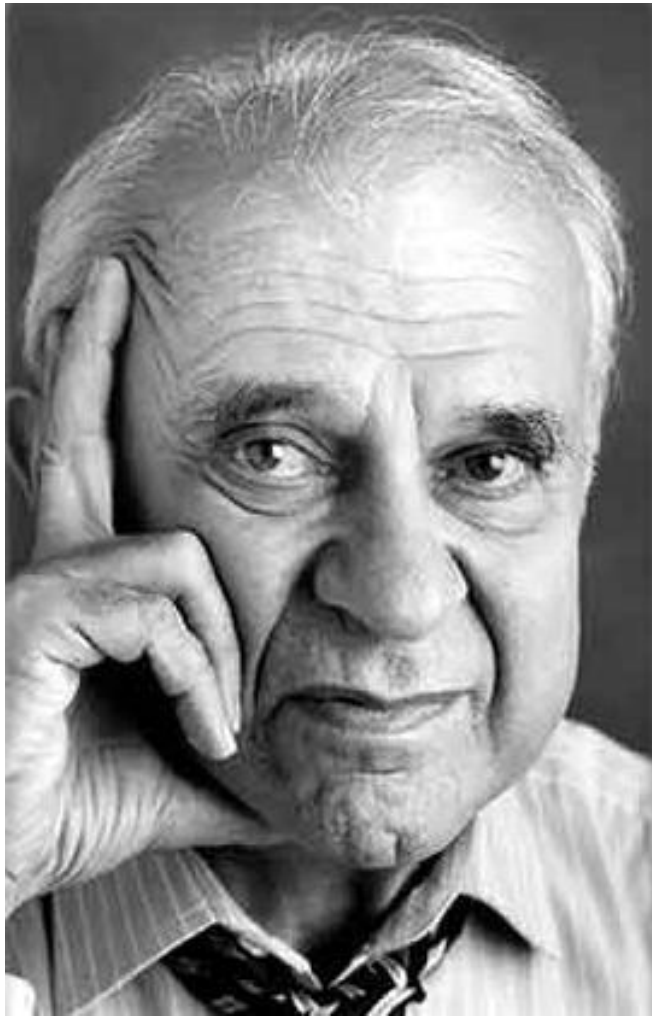


Модель межотраслевого баланса



Василий Васильевич Леонтьев,
1905-1999

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли				Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	X_2
...						
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	X_n
Условно-чистая продукция	Z_1	Z_2	...	Z_n	$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n Z_j$	
Валовой продукт	X_1	X_2	...	X_n		$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{j=1}^n X_j$

	Текущее производственное потребление в отраслях (промежуточный продукт)							Конечный продукт					
	1	2	...	j	...	n	Итого	Непроизводственное потребление	Фонд накопления	Возмещение выбытия основных фондов и возмещение потерь	Сальдо экспорта (+) и импорта (-)	Итого	Всего валовой продукции
	Первый раздел							Второй раздел					
Текущие материальные затраты по видам продукции	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1j}	...	x_{1n}	$\sum_{j=1}^n x_{1j}$				y_1	x_1

	i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ij}	...	x_{in}	$\sum_{j=1}^n x_{ij}$				y_i	x_i

	n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nj}	...	x_{nn}	$\sum_{j=1}^n x_{nj}$				y_n	x_n
	Третий раздел							Четвертый раздел					
Амортизация и чистая продукция	z_1	z_2	...	z_j	...	z_n	$\sum_{j=1}^n z_j$						
Всего валовой продукт	x_1	x_2	...	x_j	...	x_n	$\sum_{j=1}^n x_j$						

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}$$

$$X_j = \sum_i x_{ij} + Z_j, \quad j = 1, \dots, n$$

$$X_i = \sum_j x_{ij} + Y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Обозначим a_{ij} количество продукции i -ой отрасли, расходуемое на производство единицы продукции в j -ой отрасли. Эти числа называются *коэффициентами прямых затрат*, а все их множество образует квадратную матрицу $(a_{ij})_{n \times n}$.

$$x_{ij} = a_{ij} X_j$$

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n + y_1 = X_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n + y_2 = X_2$$

.....

$$a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \dots + a_{nn}X_n + y_n = X_n,$$

$$AX + y = X$$

$$\tilde{y} = AX$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \leq 1 \text{ для } \forall j = \overline{1, n},$$

$$a_{ij} < 1 \text{ при } i = j,$$

1. По заданному вектору совокупного общественного продукта найти вектор конечного общественного продукта: $Y = (E - A)X$
2. По заданному вектору конечного общественного продукта определить вектор совокупного общественного продукта: $X = (E - A)^{-1}Y$.

Матрица материальных затрат A называется *продуктивной*, если найдется такой план X , в котором выпуск каждой продукции строго положителен (все $x_j > 0$) и превышает совокупные затраты этой продукции в процессе производства. Таким образом, поэлементно выполняется неравенство:

$$X - AX > 0$$

При продуктивной технологической матрице существует хотя бы один план работы отраслей экономической системы, при котором каждого продукта выпускается больше, чем затрачивается на его производство.

Простейший критерий продуктивности и прибыльности, известный под названием условия Брауэра-Солоу, формулируется в терминах сумм коэффициентов матрицы технологических коэффициентов $A = (a_{ij})$ по строкам и столбцам. Данный критерий формулируется следующим образом: каждое из двух представленных условий является достаточным для продуктивности и одновременно для прибыльности:

$$1) \quad 1 > \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad \forall i = \overline{1, n};$$

$$2) \quad 1 > \sum_{i=1}^n a_{ij}, \quad \forall j = \overline{1, n}.$$

Теорема 1. Для того что бы модель межотраслевого баланса с матрицей коэффициентов прямых затрат A была продуктивной, необходимо и достаточно, чтобы матрица $(E - A)$ имела неотрицательную обратную матрицу.

Теорема 2. Технологическая матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все ее собственные числа меньше 1:

$$\max(\lambda_A) < 1$$