

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

## **Лекция 13.**

**Конечно-разностные методы  
решения систем уравнений,  
описывающих нестационарные  
режимы работы двухпоточного  
прямоточного теплообменника.**

## □ Двухпоточный прямоточный теплообменник



$$\begin{cases} \frac{dT_1}{d\tau} + a_1 \frac{dT_1}{dx} = b_1 (T_{\text{ст}} - T_1) \\ \frac{dT_{\text{ст}}}{d\tau} = \beta_1 (T_1 - T_{\text{ст}}) + \beta_2 (T_2 - T_{\text{ст}}) \\ \frac{dT_2}{d\tau} + a_2 \frac{dT_2}{dx} = b_2 (T_{\text{ст}} - T_2) \end{cases}$$

▣ **Начальные условия:**

$$T_1 \Big|_{\tau=0} = T_1^0(x)$$

$$T_2 \Big|_{\tau=0} = T_2^0(x)$$

$$T_{\text{ст}} \Big|_{\tau=0} = T_{\text{ст}}^0(x)$$

**Граничные условия общего вида  
будут иметь следующий вид:**

$$k_1(\tau) = m_1(\tau)T_1(\tau,0) + m_3(\tau)T_1(\tau,1) + m_5(\tau)T_2(\tau,0) + m_7(\tau)T_2(\tau,1)$$

$$k_2(\tau) = m_2(\tau)T_1(\tau,0) + m_4(\tau)T_1(\tau,1) + m_6(\tau)T_2(\tau,0) + m_8(\tau)T_2(\tau,1)$$

# Явная конечно-разностная схема имеет

**ВИД:**

$$\frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{\Delta \tau} + a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^j - T_{1,i-1}^j}{\Delta x} = b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{1,i-1}^j),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^j}{\Delta \tau} = \beta_{1,i}^j (T_{1,i}^j - T_{cm,i}^j) + \beta_{2,i}^j (T_{2,i}^j - T_{cm,i}^j), \quad i = 1, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{\Delta \tau} + a_{2,i-1}^j \frac{T_{2,i}^j - T_{2,i-1}^j}{\Delta x} = b_{2,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{2,i-1}^j),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$j = 1, \dots, m$$

## Граничное условие:

$$k_1^j = m_{1,1}^j T_{1,1}^j + m_{3,1,n+1}^j T_{1,n+1}^j + m_{5,2,1}^j T_{2,1}^j + m_{7,2,n+1}^j T_{2,n+1}^j$$

$$k_2^j = m_{2,1,1}^j T_{1,1}^j + m_{4,1,n+1}^j T_{1,n+1}^j + m_{6,2,1}^j T_{2,1}^j + m_{8,2,n+1}^j T_{2,n+1}^j$$

$$j = 1, \dots, m + 1$$

## Начальные условия:

$$T_{1,i}^1 = T_1^0(x_i), \quad T_{2,i}^1 = T_2^0(x_i)$$

$$T_{cm,i}^1 = T_{cm}^0(x_i), \quad i = 1, \dots, n + 1$$

**Схема устойчива при выполнении условия:**

$$\frac{\|a\| \Delta \tau}{\Delta x} \leq 1$$

$$\|a\| = \max(|a_{1,i}^j|, |a_{2,i}^j|)$$

**Погрешность аппроксимации первого порядка:**  $O(\Delta x) + O(\Delta \tau)$

**Из конечно-разностных уравнений  
получаются следующие выражения для  
определения неизвестных значений  
температур потоков и стенки:**

$$T_{1,i}^{j+1} = T_{1,i}^j + \Delta\tau \left[ b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{1,i-1}^j) - a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^j - T_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right],$$

$$T_{cm,i}^{j+1} = T_{cm,i}^j + \Delta\tau \left[ \beta_{1,i-1}^j (T_{1,i-1}^j - T_{cm,i-1}^j) + \beta_{2,i-1}^j (T_{2,i-1}^j - T_{cm,i-1}^j) \right]$$

$$T_{2,i}^{j+1} = T_{2,i}^j + \Delta\tau \left[ b_{2,i-1}^j (T_{cm,i-1}^j - T_{2,i-1}^j) - a_{2,i-1}^j \frac{T_{2,i}^j - T_{2,i-1}^j}{\Delta x} \right]$$

# Неявная конечно-разностная схема

имеет вид:

$$\frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i}^j}{\Delta \tau} + a_{1,i-1}^j \frac{T_{1,i}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}}{\Delta x} = b_{1,i-1}^j (T_{cm,i-1}^{j+1} - T_{1,i-1}^{j+1}),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{cm,i}^{j+1} - T_{cm,i}^j}{\Delta \tau} = \beta_{1,i}^j (T_{1,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j+1}) + \beta_{2,i}^j (T_{2,i}^{j+1} - T_{cm,i}^{j+1}), \quad i = 1, \dots, n+1$$

$$\frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i}^j}{\Delta \tau} + a_{2,i-1}^j \frac{T_{2,i}^{j+1} - T_{2,i-1}^{j+1}}{\Delta x} = b_{2,i-1}^j (T_{cm,i-1}^{j+1} - T_{2,i-1}^{j+1}),$$

$$i = 2, \dots, n+1$$

$$j = 1, \dots, m$$



**В случае независимых граничных условий:**

$$T_2 |_{x=0} = T_{20}(\tau)$$

$$T_1 |_{x=0} = T_{10}(\tau)$$

**т.е. известных значений**

$$T_{1,1}^j = T_{10}^j, \quad T_{2,1}^j = T_{20}^j$$

$$j = 1, \dots, m + 1$$

# преобразовывая:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{1,i}^{j+1} \left( \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{a_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right) + T_{1,i-1}^{j+1} \left( b_{1,i-1}^j - \frac{a_{1,i-1}^j}{\Delta x} \right) = T_{1,i}^j \frac{1}{\Delta\tau} + b_{1,i-1}^j T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1} \left( \frac{1}{\Delta\tau} + \beta_{1,i}^j + \beta_{2,i}^j \right) = T_{cm,i}^j \left( \frac{1}{\Delta\tau} \right) + \beta_{1,i}^j T_{1,i}^{j+1} + \beta_{2,i}^j T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1} \left( \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{a_{2,i-1}^j}{\Delta x} \right) + T_{2,i-1}^{j+1} \left( b_{2,i-1}^j - \frac{a_{2,i-1}^j}{\Delta x} \right) = T_{2,i}^j \frac{1}{\Delta\tau} + b_{2,i-1}^j T_{cm,i-1}^{j+1} \end{array} \right.$$

## преобразовывая:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{1,i}^{j+1} (\Delta x + a_{1,i-1}^j \Delta \tau) + T_{1,i-1}^{j+1} (b_{1,i-1}^j \Delta x - a_{1,i-1}^j \Delta \tau) &= \\ &= T_{1,i}^j (\Delta x) + (\Delta x \Delta \tau b_{1,i-1}^j) T_{cm,i-1}^{j+1} \\ T_{cm,i}^{j+1} (1 + \Delta \tau (\beta_{1,i}^j + \beta_{2,i}^j)) &= \\ &= T_{cm,i}^j + (\Delta \tau \beta_{1,i}^j) T_{1,i}^{j+1} + (\Delta \tau \beta_{2,i}^j) T_{2,i}^{j+1} \\ T_{2,i}^{j+1} (\Delta x + a_{2,i-1}^j \Delta \tau) + T_{2,i-1}^{j+1} (b_{2,i-1}^j \Delta x - a_{2,i-1}^j \Delta \tau) &= \\ &= T_{2,i}^j (\Delta x) + (\Delta x \Delta \tau b_{2,i-1}^j) T_{cm,i-1}^{j+1} \end{aligned} \right.$$

# В итоге решение можно получить из рекуррентных соотношений:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{1,i}^{j+1} &= \\ &= \frac{(a_{1,i-1}^j \Delta \tau - b_{1,i-1}^j \Delta x) T_{1,i-1}^{j+1} + \Delta x T_{1,i}^j + (\Delta x \Delta \tau b_{1,i-1}^j) T_{cm,i-1}^{j+1}}{\Delta x + a_{1,i-1}^j \Delta \tau} \\ T_{cm,i}^{j+1} &= \frac{T_{cm,i}^j + (\Delta \tau \beta_{1,i}^j) T_{1,i}^{j+1} + (\Delta \tau \beta_{2,i}^j) T_{2,i}^{j+1}}{1 + \Delta \tau (\beta_{1,i}^j + \beta_{2,i}^j)} \\ T_{2,i}^{j+1} &= \\ &= \frac{(a_{2,i-1}^j \Delta \tau - b_{2,i-1}^j \Delta x) T_{2,i-1}^{j+1} + \Delta x T_{2,i}^j + (\Delta x \Delta \tau b_{2,i-1}^j) T_{cm,i-1}^{j+1}}{\Delta x + a_{2,i-1}^j \Delta \tau} \end{aligned} \right.$$

При использовании граничных условий общего вида необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений, получающихся из конечно-разностных аналогов и граничных условий.

---

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!**