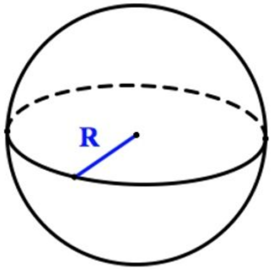
Аналитическая геометрия

Часть 2

Геометрия в пространстве

Геометрический смысл уравнения с тремя переменными.

Подобно тому, как на плоскости Oxy уравнение $F(x,y)=0$ определяет линию, так и уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет в пространстве некоторую поверхность как геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.



Пример

Вывод уравнения сферы радиуса R с центром в точке $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

Сфера – это геометрическое место точек, равноудаленных от центра. Вычислим расстояние от произвольной точки M(x,y,z) до центра $M_o(x_o, y_o, z_o)$.

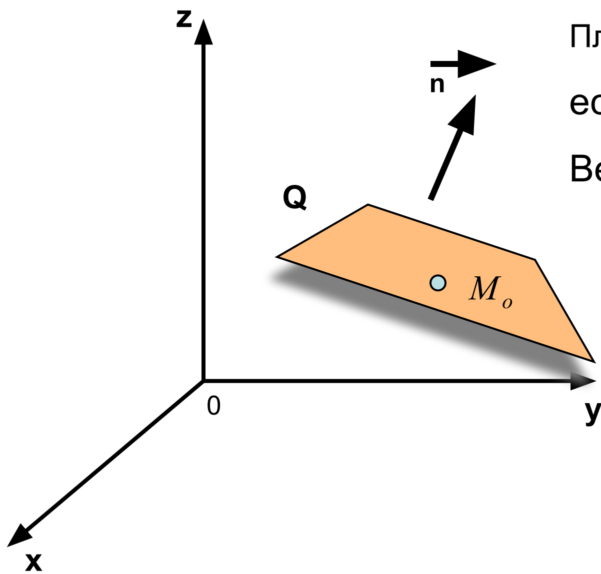
Приравняем его радиусу R и возведем в квадрат

$$|MM_o| = \sqrt{(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2},$$

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2}$$ - уравнение сферы.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Уравнения плоскости.**



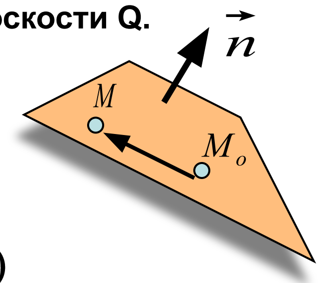
Плоскость Q определена единственным образом,

если задана одна точка $M_o \in Q$ и вектор $\vec{n} \perp$ Q**.**

Вектор $\vec{n} \perp$ Q называют **нормальным** вектором.

Необходимое и достаточное условие того, что точка M принадлежит плоскости Q.

$\boxed{\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n}}$



$$\mathrm{M(x,y,z)}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M_0M}} = \{\mathrm{x - x_0, y - y_0, z - z_0}\}$$

- **1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору.**
  - Заданы: точка $M_o(x_o, y_o, z_o)$
  - и нормальный вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$
  - **Уравнение плоскости**:

$$\boxed{A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0}$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in Q$

Тогда

$$\overrightarrow{M_oM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} \bullet \vec{n} = 0$$

Общее уравнение плоскости

- Раскроем скобки в уравнении плоскости, проходящей через данную точку (полученном ранее):

$$A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$$

$$\mathrm{Ax}-\mathrm{Ax_o}+\mathrm{By}-\mathrm{By_o}+\mathrm{Cz}-\mathrm{Cz_o}=0$$

$$\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}-\mathrm{Ax_o}-\mathrm{By_o}-\mathrm{Cz_o}=0$$

Обозначим $\mathrm{D}=-\mathrm{Ax_o}-\mathrm{By_o}-\mathrm{Cz_o}$

Получим $\boxed{\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{Cz}+\mathrm{D}=0}$ - общее уравнение плоскости

Пример

Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1;2;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = \{4;1;3\}$

.

Решение

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

$\vec{n} = \{A, B, C\}$ $M_o(x_o, y_o, z_o)$

$$4 \cdot (x - (-1)) + 1 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 5) = 0$$

$$4x + 4 + y - 2 + 3z - 15 = 0$$

$$4x + y + 3z - 13 = 0$$

Ответ: $4x + y + 3z - 13 = 0$

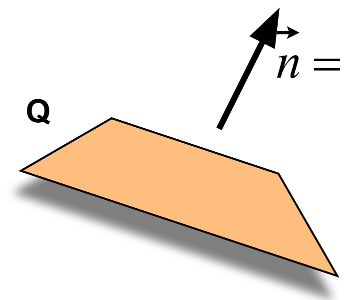
Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Общее уравнение плоскости.**
  - Уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

  - называется **общим уравнением плоскости.**
  - Коэффициенты **A,B,C** в уравнении определяют **координаты нормального вектора:**

$$\vec{n} = \{A, B, C\}$$



$$\vec{n} = \{A, B, C\} \perp \text{Q}$$

Теорема.
Всякое уравнение первой степени с тремя переменными **x,y,z** вида

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

задает **плоскость** в пространстве и наоборот, **всякая плоскость** в пространстве может быть задана уравнением с тремя переменными **x,y,z** вида (1).

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **3. Исследование общего уравнения плоскости.**
  - **1.** Коэффициент **D=0** $\Rightarrow \text{точка} \;\; O(0,0,0) \in Q$ **(рис. 1)**
  - **2.** Коэффициент **A=0** $\Rightarrow \vec{n} = (0, B, C) \perp OX \Rightarrow Q \parallel OX$ **(рис. 2)**
  - **3.** Коэффициент **B=0** $\Rightarrow \vec{n} = (A, 0, C) \perp OY \Rightarrow Q \parallel OY$ **(рис. 3)**
  - **4.** Коэффициент **C=0** $\Rightarrow \vec{n} = (A, B, 0) \perp OZ \Rightarrow Q \parallel OZ$ **(рис. 4)**

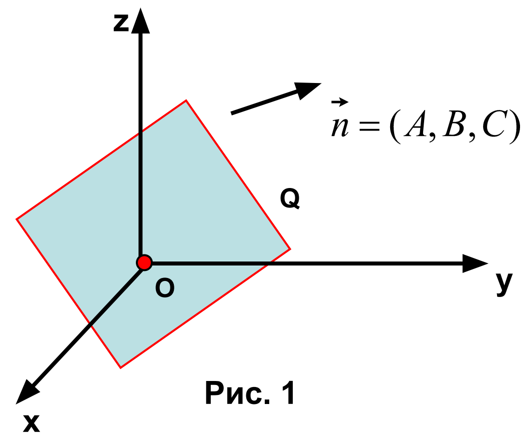


Рис. 1

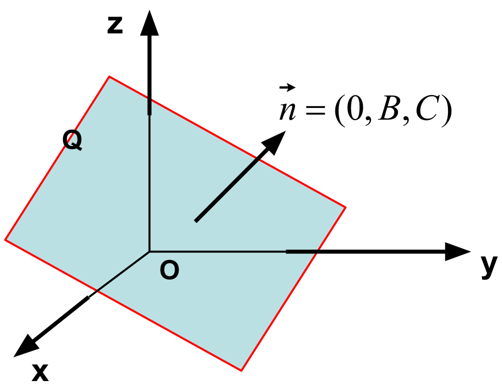


Рис. 2

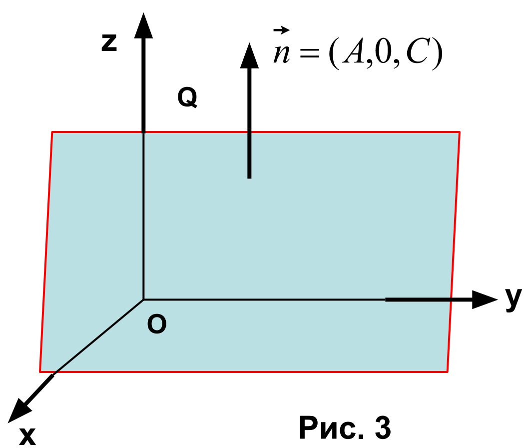


Рис. 3

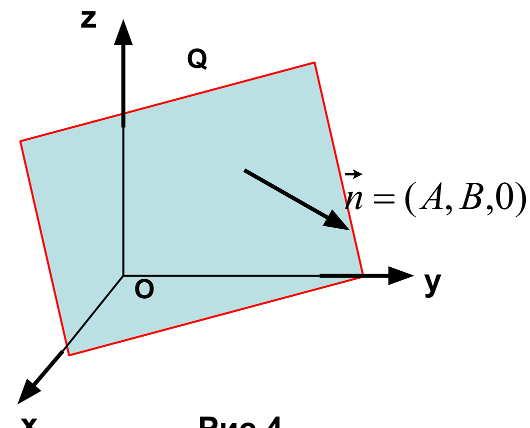


Рис.4

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **5.** Коэффициенты **A=B=0** $\Rightarrow \vec{n}=(0,0,C)\parallel OZ \Rightarrow Q\perp OZ$ **(рис. 5)**
- **6.** Коэффициенты **A=C=0** $\Rightarrow \vec{n}=(0,B,0)\parallel OY \Rightarrow Q\perp OY$ **(рис. 6)**
- **7.** Коэффициенты **B=C=0** $\Rightarrow \vec{n}=(A,0,0)\parallel OX \Rightarrow Q\perp OX$ **(рис. 7)**

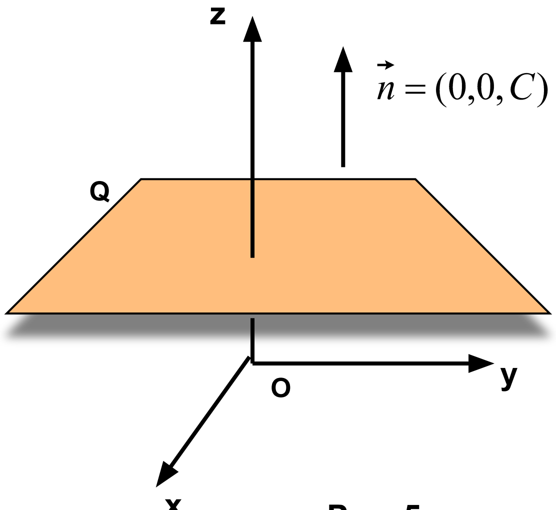


Рис. 5

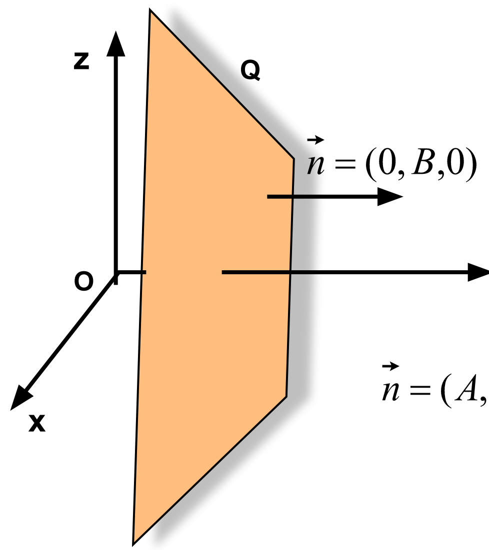


Рис. 6

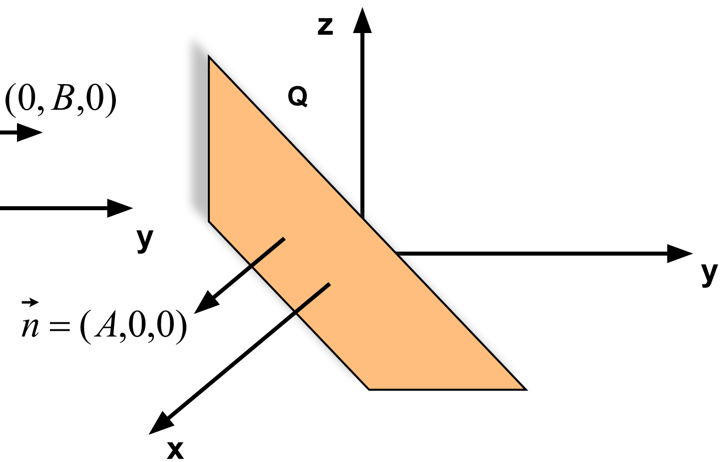
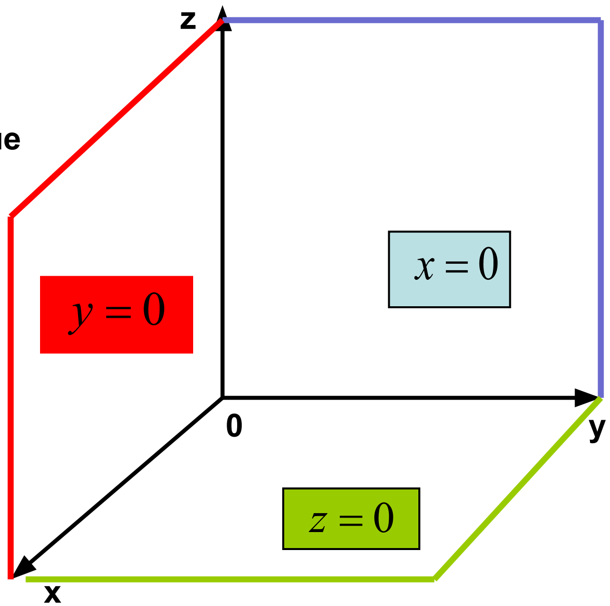


Рис. 7

Аналитическая геометрия в пространстве.

8. Коэффициенты **A=B=D=0** $\Rightarrow z = 0$
– **9.** Коэффициенты **A=C=D=0** $\Rightarrow y = 0$
– **10.** Коэффициенты **B=C=D=0** $\Rightarrow x = 0$

Координатные плоскости

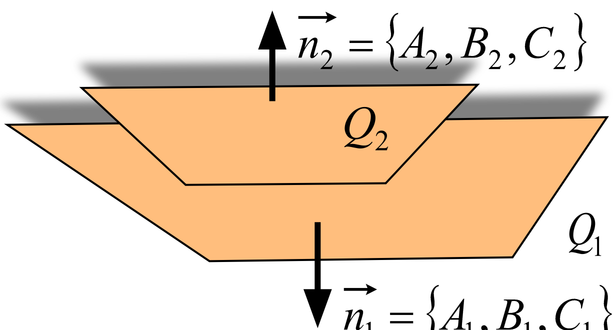


Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Взаимное расположение плоскостей и прямых в пространстве.**
- **1. Условие параллельности плоскостей.**

$$Q_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

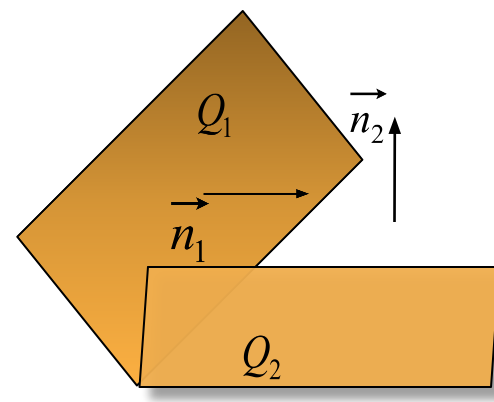
$$Q_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



$$Q_1 \parallel Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$

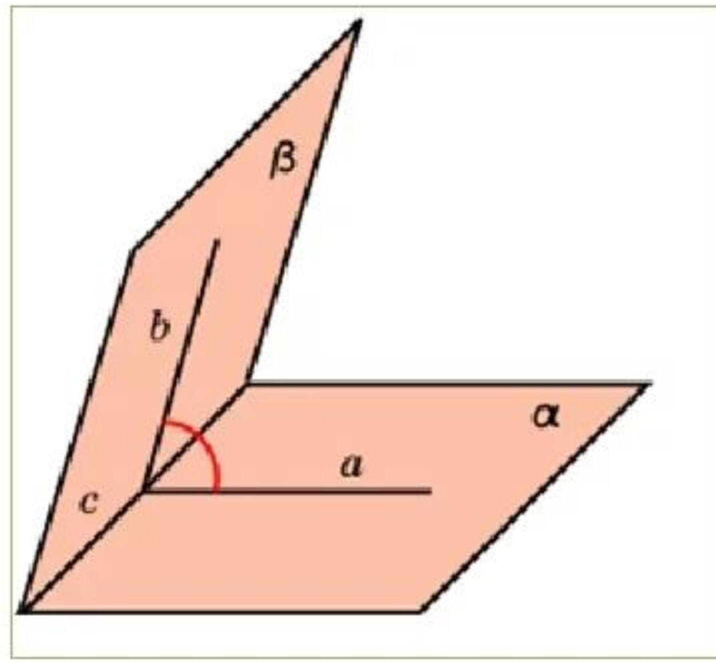
- **2. Условие перпендикулярности плоскостей.**

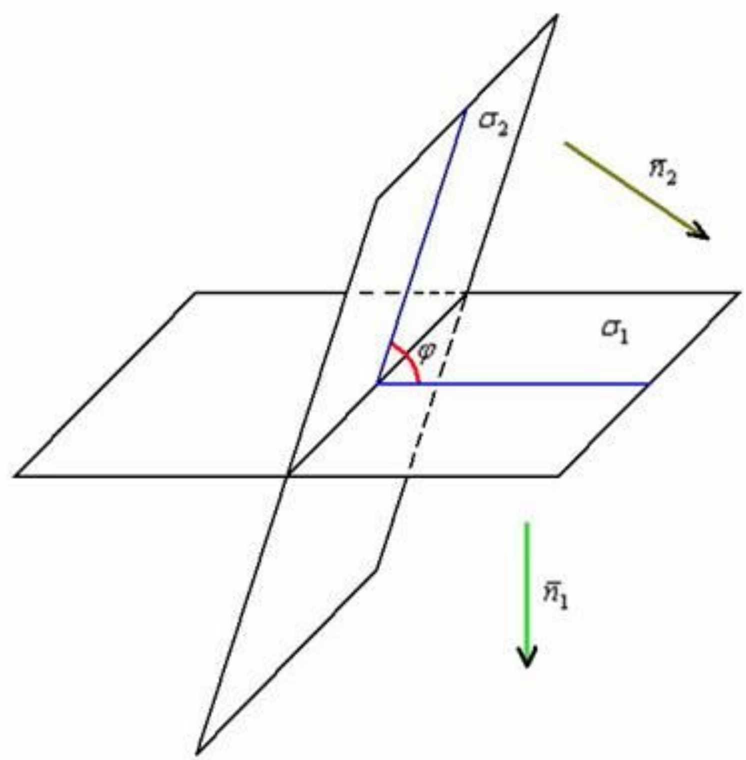
$$Q_1 \perp Q_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}$$



Определение:

Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями.





σ_2
$\bar{n}_2$
σ_1
φ
$\bar{n}_1$

Угол между двумя плоскостями

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Задание линий в пространстве

Линию,в том числе и прямую, будем рассматривать как пересечение двух поверхностей. Если эти поверхности заданы уравнениями в виде $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$,

то линия пересечения определяется системой уравнений:

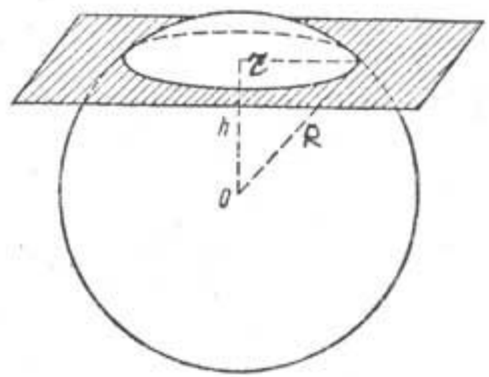
$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Пример

Рассмотрим линию, определяемую системой уравнений

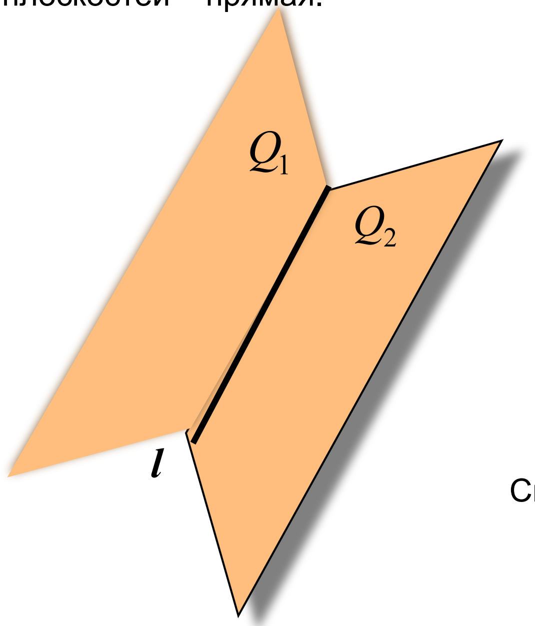
$$\begin{cases} \mathbf{x^2 + y^2 + z^2 = 25} \\ \mathbf{z = 3} \end{cases}$$

$R=5$, $h=3$



Аналитическая геометрия в пространстве.

- **Уравнения прямой в пространстве.**
- **1. Общее уравнение прямой.**
  - Аксиома: линия пересечения двух плоскостей – прямая.



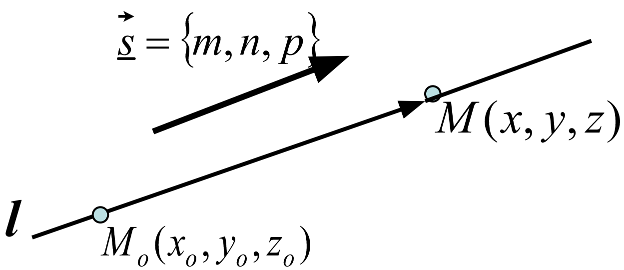
$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (Q_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (Q_2) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема.
Система уравнений (2) определяет **прямую в пространстве** тогда и только тогда, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2

Система уравнений (2) называется **общим уравнением** прямой.

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **2. Канонические уравнения прямой.**



$$\boxed{\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_o}{p}} \; (= \lambda)$$

Пусть точка $M(x, y, z) \in l.$

Тогда $\overrightarrow{M_oM} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_oM} = \lambda \vec{s}$

- **3. Параметрические уравнения прямой.**

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_o}{m} = \lambda \Rightarrow x = x_o + \lambda m \\ \dfrac{y - y_o}{n} = \lambda \Rightarrow y = y_o + \lambda n \\ \dfrac{z - z_o}{p} = \lambda \Rightarrow z = z_o + \lambda p \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} x = x_o + \lambda m \\ y = y_o + \lambda n \\ z = z_o + \lambda p \end{cases}$$

$-\infty < \lambda < \infty - параметр$

8. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно вектору $\dot{s} = \{-2;5;-7\}$

Требуется составить канонические уравнения прямой

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$$

Подставляем исходные данные $\frac{x-4}{-2} = \frac{y+6}{5} = \frac{z-2}{-7}$

9. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(4;-6;2)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x = -7t + 2 \\ y = 13t - 3 \\ z = 9t \end{cases}$$

Для все параллельных прямых можно использовать один направляющий вектор. Поэтому для искомой прямой имеем точку и направляющий вектор $\dot{s} = \{-7;13;9\}$

Уравнения прямой $\frac{x-4}{-7} = \frac{y+6}{13} = \frac{z-2}{9}$

13. Перейти от общего уравнения прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 7 = 0 \\ x + 4y - 5z + 10 = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} N_1 = \{2;-1;3\} \\ N_2 = \{1;4;-5\} \end{matrix}$$

Как уже отмечалось, для перехода к каноническому виду

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

нужно знать точку на прямой и направляющий вектор

а) Находим направляющий вектор

$$\bar{s} = [\overline{N_1} \times \overline{N_2}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} + 13\vec{j} + 9\vec{k}$$

Итак, направляющий вектор

$$\dot{s} = \{-7;13;9\}$$

б) Находим точку на прямой. Для этого можно положить в системе уравнений одну из координат равной нулю. Итак, $z = 0$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 4y = -10 \end{cases}$$

Решая ее, найдем

$$x = 2, \quad y = -3$$

Точка $M(2;-3;0)$

и канонические уравнения

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y+3}{13} = \frac{z}{9}$$

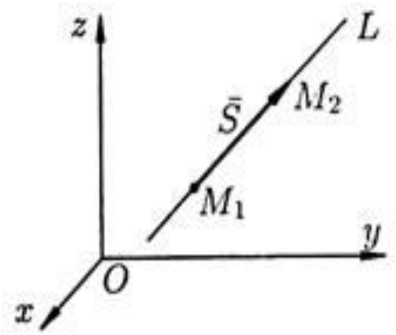
Получим параметрические уравнения

$$\frac{x-2}{-7} = \frac{y+3}{13} = \frac{z}{9} = t$$

$$\begin{cases} x = -7t + 2 \\ y = 13t - 3 \\ z = 9t \end{cases}$$

Уравнения прямой, проходящей через две данные точки

- Пусть прямая L проходит через две заданные точки:



$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\quad}$$

- Тогда за ее направляющий вектор можно взять

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\quad}$$

- Получим уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Пример

- Даны две точки, через которые проходит прямая:

$$M_1(2;-3;4),\ M_2(1;3;5)$$

- Составить уравнения этой прямой.

- Решение.

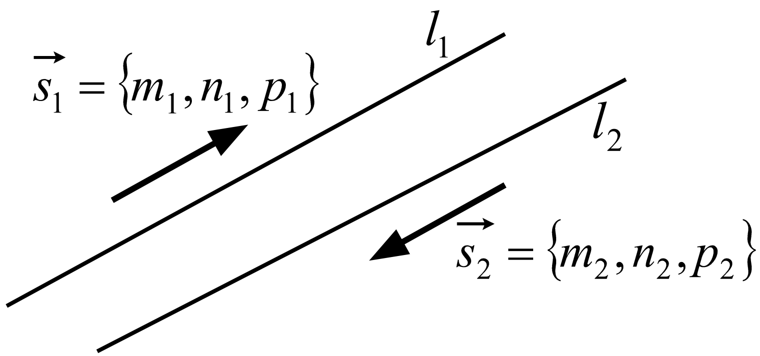
- Подставляя в предыдущую формулу координаты точек, получим:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y+3}{3+3}=\frac{z-4}{5-4}$$

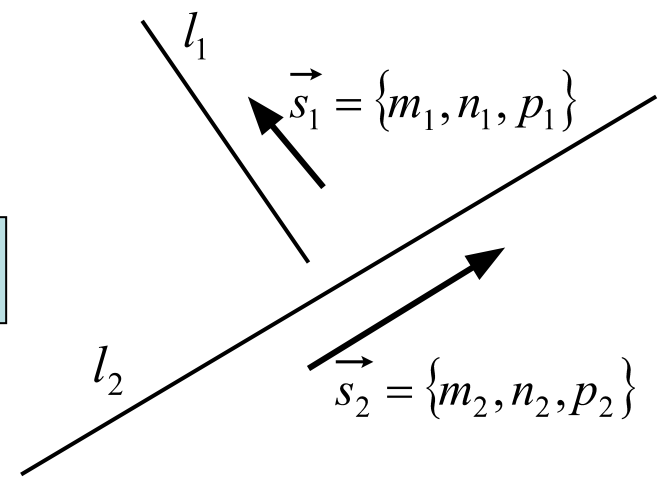
$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-4}{1}$$

Аналитическая геометрия в пространстве.

- **3. Условие параллельности прямых.**



$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}}$$



- **4. Условие перпендикулярности прямых.**

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2 \Leftrightarrow \boxed{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0}$$

Угол между двумя прямыми

Угол между двумя пересекающимися прямыми – это острый угол между ними.

Даны направляющие векторы прямых:

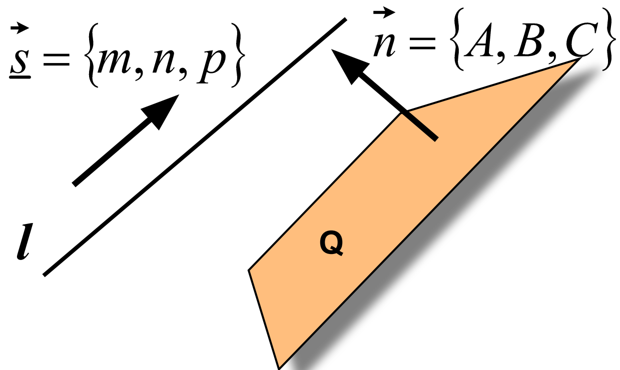
$\vec{s}_1 = \{m_1, n_1.p_1\}, \ \vec{s}_2 = \{m_2, n_2.p_2\}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}}$$

В координатной форме написать самостоятельно.

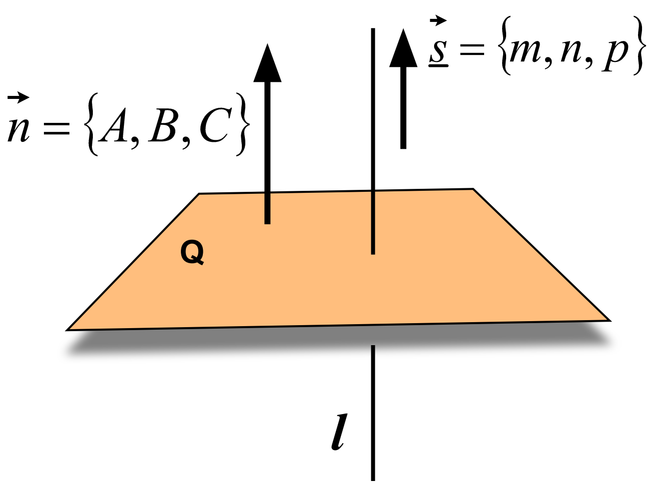
Аналитическая геометрия в пространстве.

- 5. Условие параллельности прямой и плоскости.



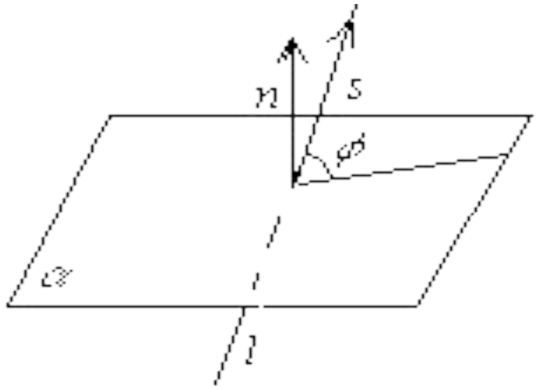
$$l \parallel Q \Leftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{s}\,\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{Am + Bn + Cp = 0}$$

- 6. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.



$$l \perp Q \Leftrightarrow \vec{s} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \boxed{\frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}}$$

Угол между прямой и плоскостью



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}$$

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{s}}{|\vec{n}||\vec{s}|}}$$

Пример

- Найти угол между прямой $\frac{x-2}{4}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+7}{3}$
- и плоскостью $5x+3y-4z+8=0$

Угол между прямой и плоскостью находим по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|(\bar{N}\cdot\bar{s})|}{|\bar{N}|\cdot|\bar{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$\bar{N}=\{5;3;-4\}$ - вектор нормали плоскости

$\bar{s}=\{4;-1;3\}$ - направляющий вектор прямой

Подставляем в формулу

$$\sin\varphi = \frac{|(\bar{N}\cdot\bar{s})|}{|\bar{N}|\cdot|\bar{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}} =$$

$$= \frac{|20-3-12|}{\sqrt{5^2+3^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2+3^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{26}} = \frac{5}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{52}} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$$

Пример

Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z-2}{1} \qquad y+5z+6=0$$

Напишем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x=3t+1 \\ y=5t \\ z=t+2 \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости:

$$5t+5(t+2)+6=0 \quad \Rightarrow \quad 10t+16=0 \quad \Rightarrow \quad t_0=-1.6$$

Подставим в уравнение прямой:

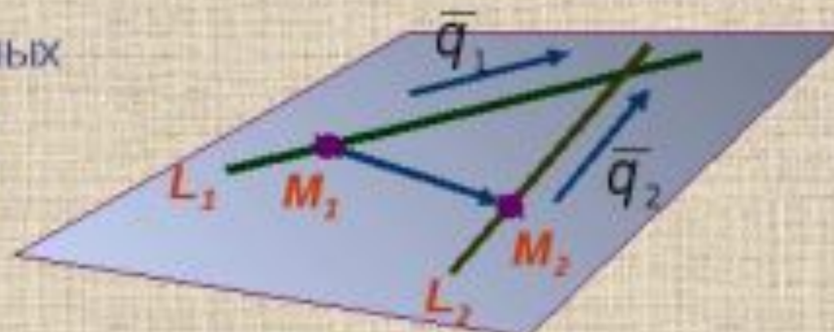
$$\begin{cases} x=3\cdot(-1.6)+1 \\ y=5\cdot(-1.6) \\ z=-1.6+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3.8 \\ y=-8 \\ z=0.4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{K(-3.8;-8;0.4)}$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1:\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad L_2:\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

Для принадлежности двух прямых одной плоскости необходимо и достаточно, чтобы три вектора:



$$\bar{q}_1=\{m_1;n_1;p_1\}$$

$$\bar{q}_2=\{m_2;n_2;p_2\}$$

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$$

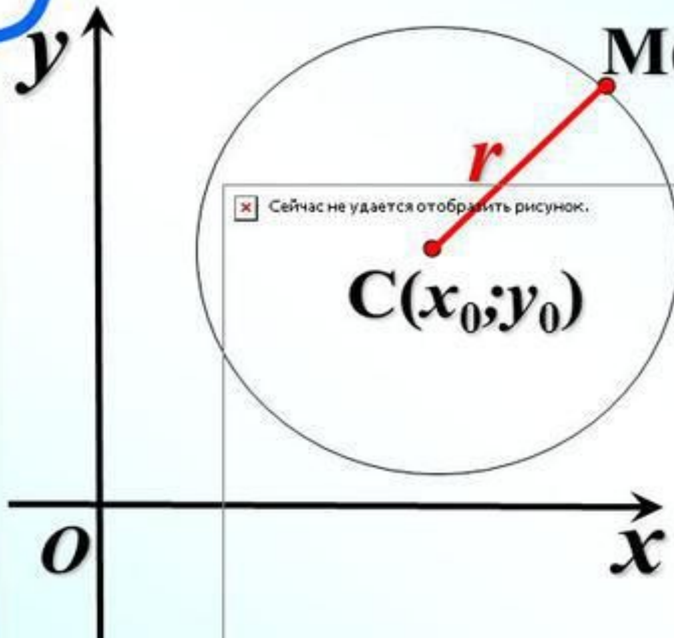
были компланарны.

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0$$

Условие принадлежности двух прямых одной плоскости

Кривые второго порядка

Окружность



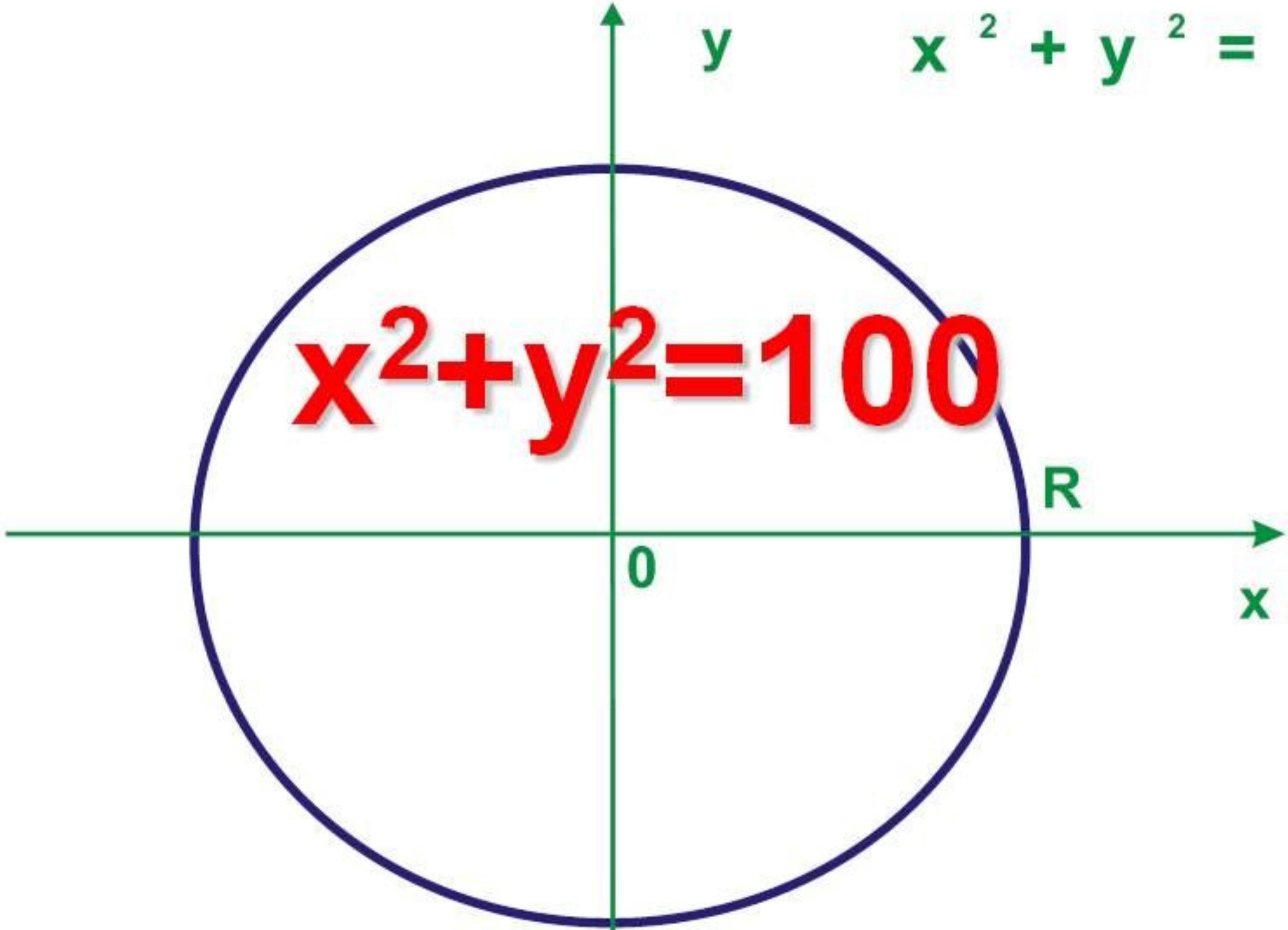
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

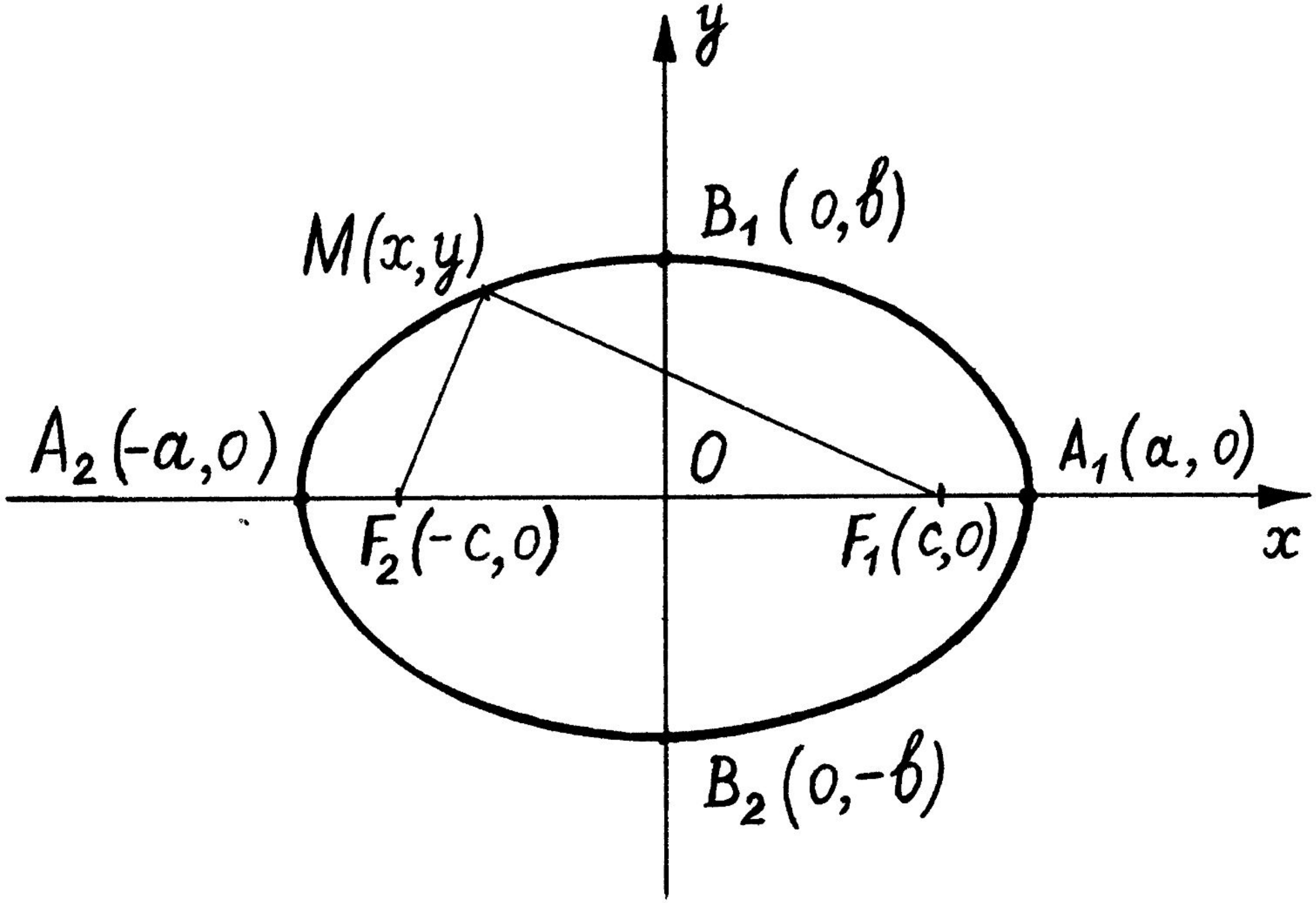
В прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса r с центром в точке $C(x_0;y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 = R^2$$



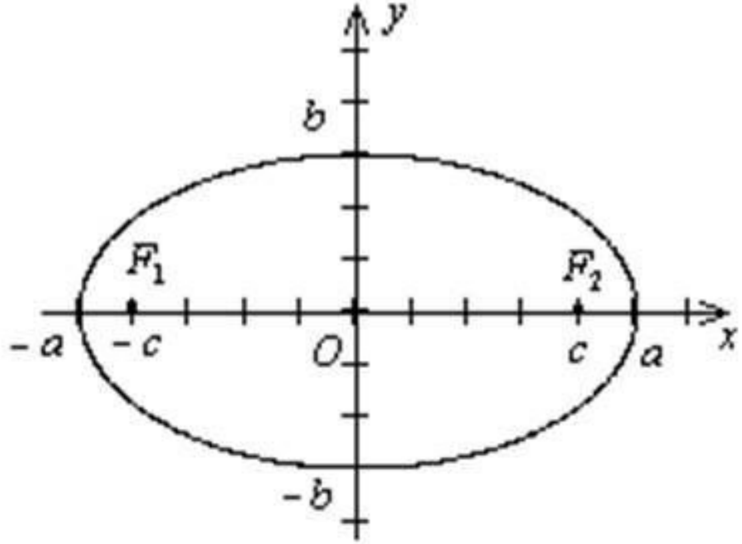
Уравнение окружности с центром в начале координат

Эллипс



Эллипсом называется кривая, уравнение которой в некоторой прямоугольной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geq b > 0$$



Гипербола

Построение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Для построения гиперболы удобно пользоваться вспомогательными построениями.

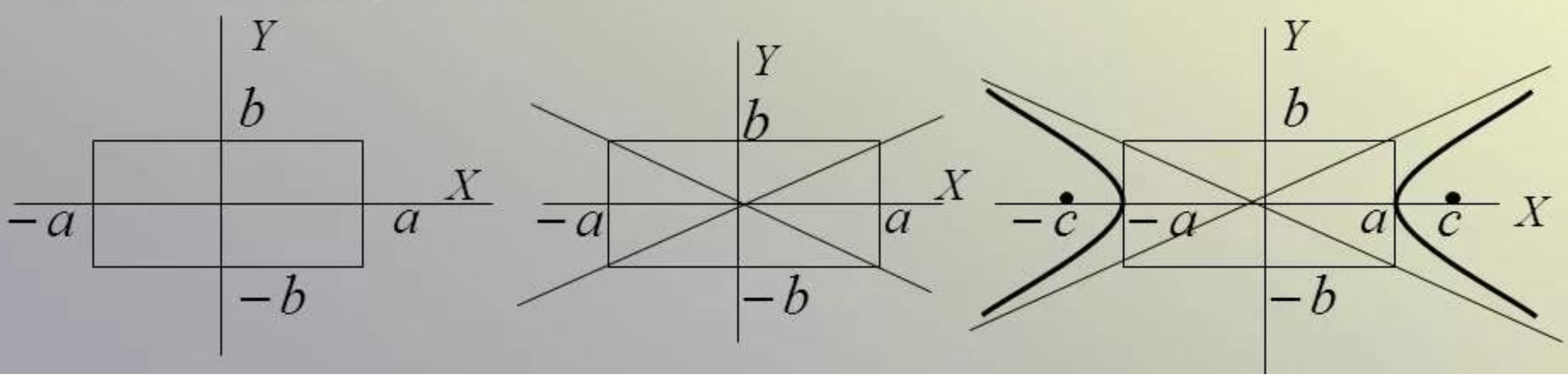
1. В системе координат строим прямоугольник с размерами $2a \times 2b$ на осях OX и OY соответственно.

2. Проводим диагонали этого прямоугольника.

Уравнения диагоналей – это уравнения асимптот гиперболы

$$y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$$

3. На действительной оси отмечаем вершины гиперболы и от них ведем ветви гиперболы к асимптотам.



Каноническое уравнение гиперболы

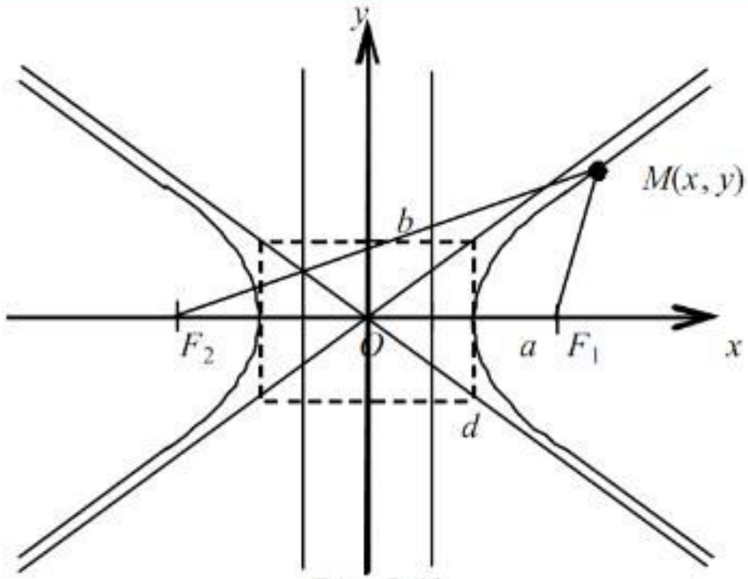


Рис. 3.43

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Сопряженные гиперболы

Гипербола, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

называется сопряженной по отношению к гиперболе

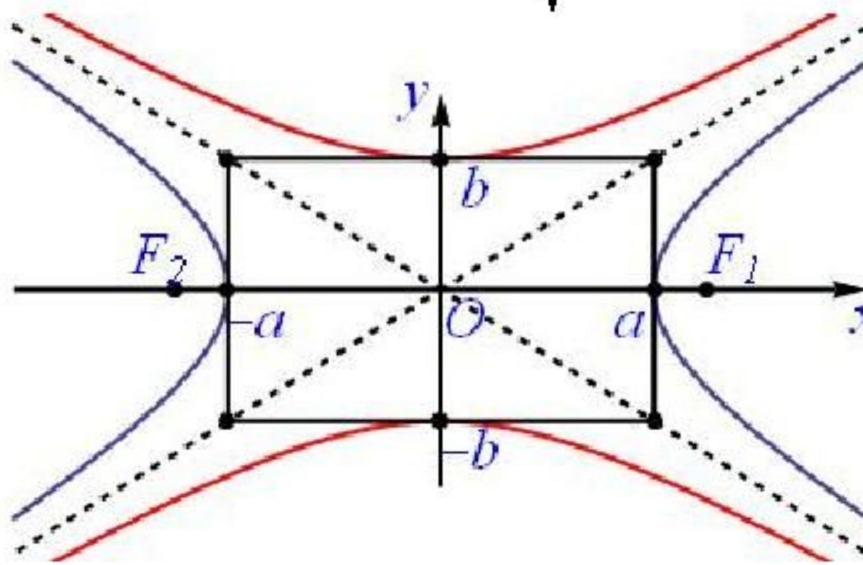
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1,$$

$$\varepsilon=\frac{c}{b}.$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

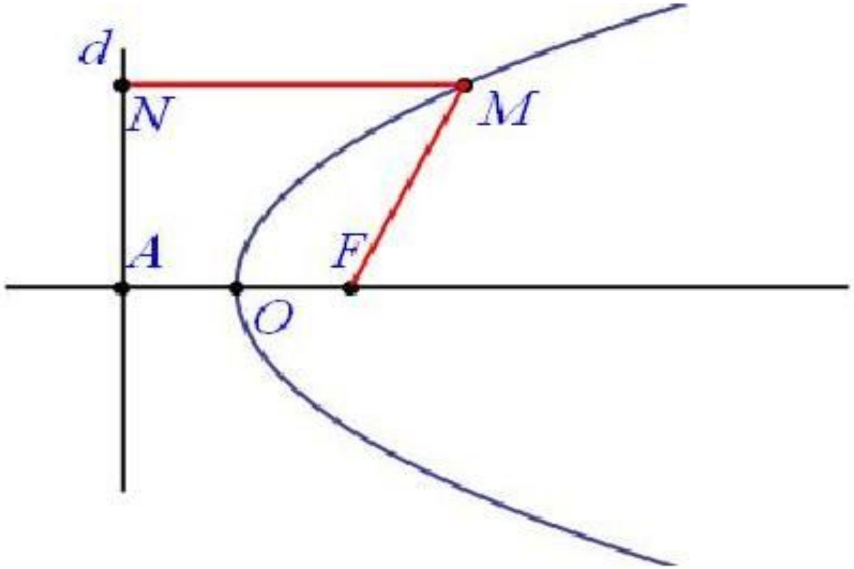
$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$



Парабола

Парабола, основные определения

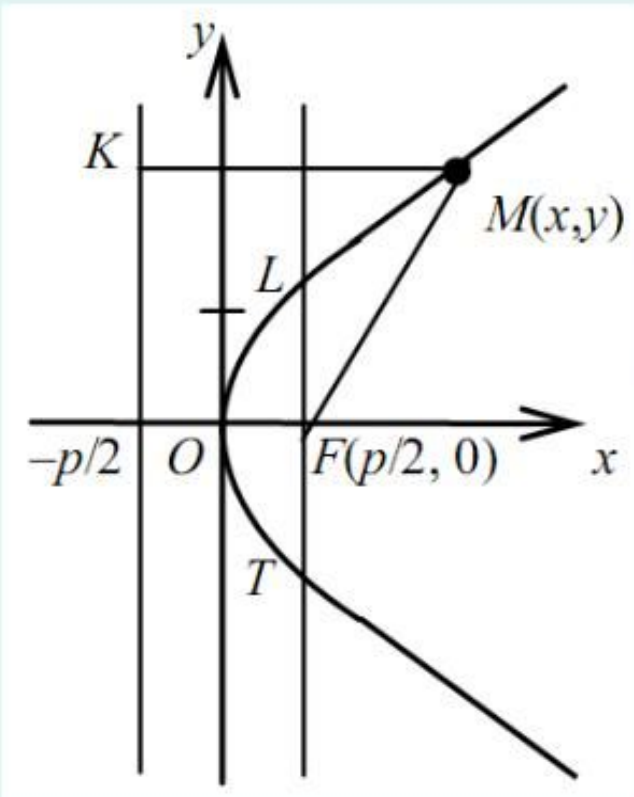
- **Парабола** – геометрическое место точек, равноудаленных от фиксированной точки и от фиксированной прямой.
- Фиксированную точку ***F*** называют ***фокусом параболы***, а прямую ***d*** – ***директрисой параболы***.
- Парабола симметрична относительно прямой, перпендикулярной директрисе и проходящей через фокус параболы. Эту прямую называют ***осью параболы***.
- Парабола пересекает свою ось в единственной точке ***O***, которую называют ***вершиной параболы***.



$$MF = MN,$$

$$AO = OF.$$

Каноническое уравнение параболы

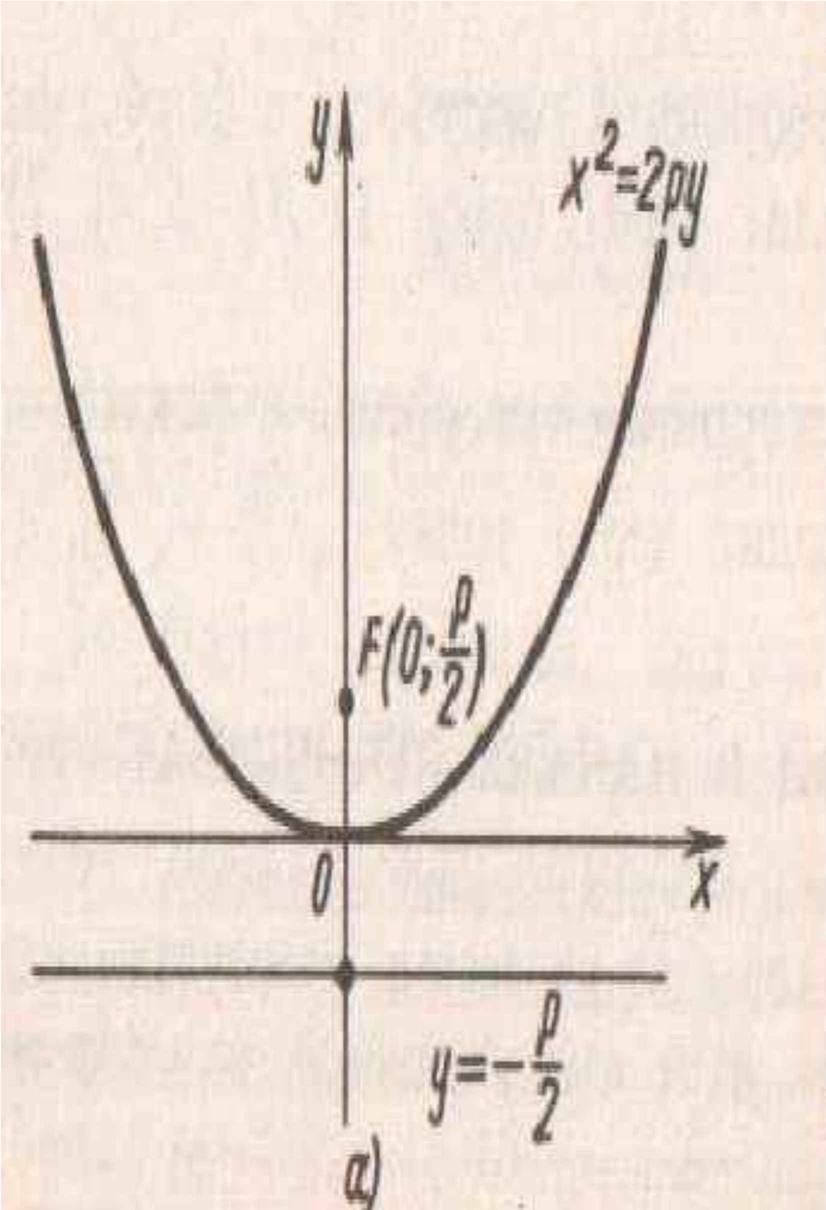


$$KM = MF.$$

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-x\right)^2+(0-y)^2}.$$

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2$$

$$y^2 = 2px$$



Уравнение параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии которой служит ось Oy и ветви направлены вверх, имеет вид

$$\mathbf{x^2 = 2py} \ (p > 0)$$

Уравнение ее директрисы

$$x = -\frac{p}{2}$$