Решение логических задач

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

Решение. Введем обозначения для следующих высказываний:

D = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

S = «студент-задолжник отчисляется»;

P = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

T = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)$$

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \vDash \Phi_2$$

$$\Psi = \Big(D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)\Big) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)\big) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= \big((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ

$$S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S\}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S.

Алгебра логических значений

<u>Определение</u>. *Алгеброй* называется непустое множество A с фиксированным набором операций $f_1,f_2,\dots,f_k$, имеющих соответствующие определенные арности $n_1,n_2,\dots,n_k$. При этом множество A называется *базисным множеством* алгебры и набор символов операций $\Omega=\{f_1,f_2,\dots,f_k\}$ соответствующей арности $n_1,n_2,\dots,n_k$ называется *алгебраическим типом* (или *сигнатурой*) алгебры.

Такая алгебра сокращенно обозначается $(A;f_1,f_2,\dots,f_k)$, или $(A;\Omega)$, или просто буквой A и называется *алгеброй типа* Ω, или сокращенно Ω-*алгеброй*.

Пример алгебры дает множество $\{0,1\}$ истинностных значений высказываний с n-арными операциями F_Φ, которые являются функциями истинностных значений формул логики высказываний $\Phi = \Phi(X_1,\ldots,X_n)$, образованных с помощью n пропозициональных переменных $X_1,\ldots,X_n$.

Формула $\Phi = \neg X$ определяет унарную операцию $F_\Phi = F_{\neg X}(x)$, которая обозначается символом x' и называется *отрицанием* или *дополнением* переменной x.

Формулы $\Phi = X \vee Y$, $\Psi = X \wedge Y$ определяют бинарные операции $F_{\Phi} = F_{X \vee Y}(x, y)$, $F_{\Psi} = F_{X \wedge Y}(x, y)$, которые обозначаются соответственно символами $x \vee y$, $x \wedge y$ и называются *дизъюнкцией* и *конъюнкцией* переменных x, y.

Операция $x \vee y$ иногда называется также *объединением* или *суммой* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cup y$ или $x + y$.

Операция $x \wedge y$ иногда называется также *пересечением* или *произведением* переменных x, y и обозначается соответственно через $x \cap y$ или $x \cdot y$.

Алгебра $\boldsymbol{B}=(\{0,1\},\vee,\wedge,')$ впервые была введена в 19-ом веке английским математиком Дж.Булем с целью применения в логике математических методов.

Поэтому эта алгебра называется *алгеброй Буля* или *алгеброй логических значений*.

Теорема. Алгебра Буля $\boldsymbol{B}=(\{0,1\},\vee,\wedge,')$ удовлетворяет свойствам:

1) $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$ – ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции;

2) $a\vee b=b\vee a$, $a\wedge b=b\wedge a$ – коммутативность дизъюнкции и конъюнкции;

3) $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$ – идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции;

4) $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$, $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ – дистрибутивность соответственно конъюнкции относительно дизъюнкции и дизъюнкции относительно конъюнкции;

5) $(a')' = a$ – идемпотентность дополнения;

6) $(a \vee b)' = a' \wedge b'$, $(a \wedge b)' = a' \vee b'$ – законы де Моргана;

7) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ – законы поглощения;

8) $a \vee a' = 1$, $a \wedge a' = 0$ – характеристическое свойство дополнения,

9) $a \vee 1 = 1$, $a \wedge 1 = a$ – характеристическое свойство наибольшего элемента 1,

10) $a \vee 0 = a$, $a \wedge 0 = 0$ – характеристическое свойство наименьшего элемента 0.

Булевы многочлены и булевы функции

Для описания алгебраических свойств булевых алгебр используются формулы, которые называются *булевыми многочленами* и которые образованы из булевых переменных $x, y, \ldots$ (принимающих значения 0,1) и символов булевых операций $+, \cdot, '$ по следующим правилам:

1) все булевы переменные $x, y, \ldots$ и символы 0,1 – булевы многочлены;

2) если p и q – булевы многочлены, то таковыми являются выражения

$$(p)+(q),\ (p)\cdot(q),\ (p)'.$$

Если p образован с помощью $x_1,\ldots,x_n$, то он обозначается $p(x_1,\ldots,x_n)$.

Множество всех булевых многочленов от n переменных обозначим P_n .

Если в $p(x_1,\ldots,x_n)$ вместо переменных $x_1,\ldots,x_n$ подставить произвольные значения $a_1,\ldots,a_n$ из множества ***B***, то в результате вычислений получится некоторый элемент $\overline{p}(a_1,\ldots,a_n)$ алгебры ***B***.

Каждый булев многочлен $p(x_1,\ldots,x_n)$ определяет отображение $\overline{p}:\boldsymbol{B}^n\rightarrow\boldsymbol{B}$, которое называется *булевой полиномиальной функцией*, определяемой булевым многочленом $p(x_1,\ldots,x_n)$.

Определение. Булевы многочлены $p, q \in P_n$ называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же булеву полиномиальную функцию, т.е. $\overline{p} = \overline{q}$.

Символическая запись: $p \sim q$ или просто $p = q$.

Бинарное отношение $\sim$ является эквивалентностью на множестве P_n.

Классы эквивалентности $[p] = \{q \in P_n : p \sim q\}$, образуют фактор-множество $P_n / \sim = \{[p] : p \in P_n\}$.

Полные системы представителей этого фактор-множества называются системами *нормальных форм* булевых многочленов.

Для булевой переменной x и $\alpha \in \{0,1\}$ положим:

$$x^{\alpha} = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ x', & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение x^{α} называется *литерой*.

Литера или конъюнкция (соответственно, дизъюнкция) литер называется *конъюнктом* (соответственно, *дизъюнктом*).

Конъюнкт (дизъюнкт) называется *совершенным*, если он содержит все булевы переменные рассматриваемой формулы.

Дизъюнкт или конъюнкция (совершенных) дизъюнктов называется (*совершенной*) *конъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно КНФ и СКНФ, соответственно.

Конъюнкт или дизъюнкция (совершенных) конъюнктов называется (*совершенной*) *дизъюнктивной нормальной формой*. Сокращенно ДНФ и СДНФ, соответственно.

<u>Теорема</u>. Любая булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ является булевой полиномиальной функцией следующих булевых многочленов:

$$p_f = \sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n} f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$$

и

$$q_f = \prod_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n} \left(f(\alpha_1,\dots,\alpha_n) + x_1^{\alpha_1'} + \dots + x_n^{\alpha_n'}\right).$$

Следствие 1. Если булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ не равна тождественно нулю, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной дизъюнктивной нормальной формы

$$p_f = \sum_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n,\\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=1}} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n},$$

которая называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СДНФ) *функции* f.

Следствие 2. Если булева функция $f\colon \boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$ не равна тождественно единице, то она является булевой полиномиальной функцией следующей совершенной конъюнктивной нормальной формы

$$q_f = \prod_{\substack{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in \boldsymbol{B}^n, \\ f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0}} (x_1^{\alpha'_1} + \ldots + x_n^{\alpha'_n}),$$

которая называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно СКНФ) функции f.

Алгоритм нахождения СДНФ и СКНФ функции $f{:}\boldsymbol{B}^n \to \boldsymbol{B}$:

1. Составить таблицу значений функции f и добавить к ней два дополнительных столбца с заголовками «Совершенные конъюнкты» и «Совершенные дизъюнкты».

2. Если при значениях $x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$ значение функции f равно 1, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные конъюнкты» записать конъюнкт $x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ и в столбце «Совершенные дизъюнкты» сделать прочерк (при этом $x^1 = x$ и $x^0 = x'$).

3. Если при значениях $x_1 = m_1, \ldots, x_n = m_n$ значение функции f равно 0, то в соответствующей строке таблицы в столбце «Совершенные дизъюнкты» записать дизъюнкт $x_1^{m_1'} + \ldots + x_n^{m_n'}$ и в столбце «Совершенные конъюнкты» сделать прочерк.

x_1	…	x_n	…	$f(x_1,\ldots,x_n)$	Совершенные конъюнкты	Совершенные дизъюнкты
…	…	…	…	…	…	…
k_1	…	k_n	…	1	$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$	–
…	…	…	…	…	…	…
m_1	…	m_n	…	0	–	$x_1^{m_1'} + \ldots + x_n^{m_n'}$
…	…	…	…	…	…	…

4. Дизъюнкция полученных совершенных конъюнктов

$$x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} + \ldots$$

является СДНФ функции f, конъюнкция полученных совершенных дизъюнктов

$$(x_1^{m'_1} + \ldots + x_n^{m'_n}) \cdot \ldots$$

является СКНФ функции f.

Системы булевых функций

Операция отрицания ′ является одной из четырех булевых функций от одной переменной, которые перечисляются в следующей таблице:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Операции дизъюнкция + и конъюнкция · являются примерами двух из шестнадцати булевых функций от двух переменных, которые перечисляются в следующей таблице:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	$\cdot$	$\to'$	x	$\leftarrow'$	y	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\leftrightarrow$	y'	$\leftarrow$	x'	$\to$	$\mid$	1

Функция $f_{15}(x,y) = f_2(x,y)'$ - *штрих Шеффера*, обозначается $x \mid y$.

Функция $f_9(x,y) = f_8(x,y)'$ - *стрелка Пирса*, обозначается $x \downarrow y$.

Определение. *Суперпозицией* булевых функций $g(y_1,\dots,y_m)$ и $h_1(x_1,\dots,x_n)$, $\dots$, $h_m(x_1,\dots,x_n)$ называется булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$, значения которой определяются по формуле:

$$f(x_1,\dots,x_n)=g\big(h_1(x_1,\dots,x_n),\dots,h_m(x_1,\dots,x_n)\big).$$

Для упрощения записи суперпозиции булевых функций скобки по возможности опускаются с учетом следующего приоритета выполнения булевых операций: $'$, $\cdot$ и затем все остальные операции.

Лемма. Булевы функции от двух переменных взаимосвязаны следующими свойствами:

1) $(x+y)'=x'y'$, $(xy)'=x'+y'$ – законы де Моргана;

2) $x+xy=x$, $x(x+y)=x$ – законы поглощения;

3) $x+x'=1$, $xx'=0$ – характеристическое свойство отрицания;

4) $x+1=1$, $x\cdot 1=x$ – характеристическое свойство элемента 1;

5) $x+0=x$, $x\cdot 0=0$ – характеристическое свойство элемента 0;

6) $x+y=(x'y')'$, $xy=(x'+y')'$ – взаимосвязь конъюнкции и дизъюнкции;

7) $x\to y=x'+y$, $x\to y=(xy')'$ – взаимосвязь импликации с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

8) $x \leftrightarrow y = (x \to y)(y \to x)$, $x \leftrightarrow y = (x' + y)(x + y')$;

9) $x \mid y = (xy)'$, $x' = x \mid x$, $xy = (x \mid y)' = (x \mid y) \mid (x \mid y)$, $x + y = x' \mid y' = (x \mid x) \mid (y \mid y)$ – взаимосвязь штриха Шеффера с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

10) $x \downarrow y = (x + y)'$, $x' = x \downarrow x$, $x + y = (x \downarrow y)' = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$, $xy = x' \downarrow y' = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$ – взаимосвязь стрелки Пирса с дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием;

11) $x \oplus y = y \oplus x$, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$, $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = x'$, $x \oplus x' = 1$ – характеристическое свойство суммы Жегалкина;

12) $x \oplus y = xy' + x'y$, $x \to y = xy \oplus x \oplus 1$, $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1$, $x + y = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = x \oplus y \oplus xy$ – взаимосвязь суммы Жегалкина с дизъюнкцией, конъюнкцией, отрицанием, импликацией и эквивалентностью.