



Математический анализ
1 семестр
Занятие №5

Замечательные пределы и
следствия из НИХ

Занятие 5. Тригонометрические функции

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \text{если } \alpha(x) \rightarrow 0, \text{ то } \sin \alpha(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{если } \alpha(x) \rightarrow 0, \text{ то } \cos \alpha(x) = 1 - \frac{\alpha^2(x)}{2} + o(\alpha^2(x))$$

Алгоритм:

1. $\sin \alpha(x)$ заменить на $\alpha(x) + o(\alpha(x))$.
2. $\cos \alpha(x)$ заменить на $1 - \frac{\alpha^2(x)}{2} + o(\alpha^2(x))$.
3. Сократить числитель и знаменатель на младшую степень $x - a$, находящуюся в знаменателе.
4. $\operatorname{tg} \alpha(x)$, $\operatorname{ctg} \alpha(x)$ выразить через \sin и \cos .

Занятие 5. Разность кубических корней

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x) - 3x}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 + \frac{o(x)}{x} - 3}{1 + \frac{o(x)}{x}} = 2$$

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^n} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \cdot \sin 2x} = \frac{1}{2}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^3 \sin 2x} = \frac{1}{8}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(x^2)}}{1 - \cos(x)} = \sqrt{2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$$

Занятие 5. Замена переменных

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(3\pi + 3z)}{\sin(2\pi + 2z)} =$$

$$z = x - \pi, \quad x = \pi + z$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 3\pi \cdot \cos 3z + \cos 3\pi \cdot \sin 3z}{\sin 2\pi \cdot \sin 2z + \cos 2\pi \cdot \sin 2z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-\sin 3z}{\sin 2z} = -\frac{3}{2}$$

Основные формулы:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

Занятие 5. Замена переменных

Вычислить пределы

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2} = \frac{1}{2\pi}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} = -\sqrt{2}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{4} - \sin \frac{x}{4} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos \left(\frac{2\pi}{3} - x \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x} = 2$$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено