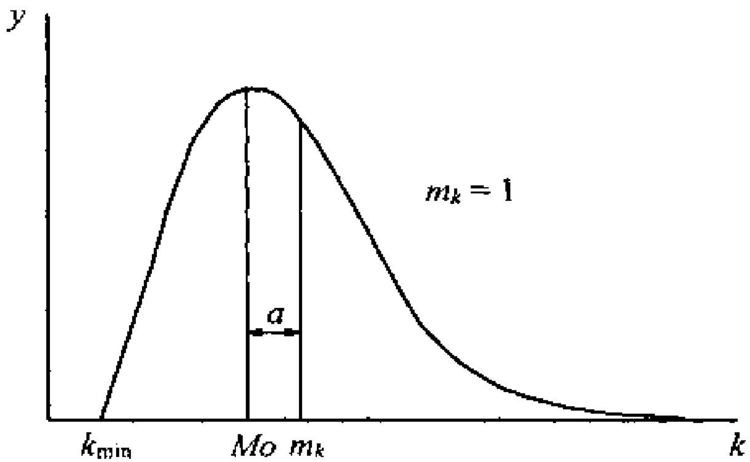
Аналитические функции распределения, используемые в гидрологии

(Ахметов С.К.)

Распределение Пирсона (общее)



Это одно - модальное распределение СВ с положительной асимметрией, которое описывается дифференциальным уравнением Пирсона *в общем виде*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(z+a)}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2}$$

где ***Z*** – случайная величина, связанная с исходной ***СВ X*** соотношение $z = x/m_x - 1 = k - 1$

k – модульный коэффициент

Y - ордината функции плотности вероятности ***СВ Z***

a – расстояние от центра распределения ***(m_x)*** до моды ***(МО)***

b_0, b_1, b_2 – параметры, изменяя которые можно получить различные типы кривых распределения

Распределение Пирсона III типа

В практике гидрологических расчетов наибольшее распространение получила кривая *Пирсона III типа*, для которой $\boldsymbol{b_2 = 0}$, тогда уравнение Пирсона приобретает вид

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+a)}{b_0 + b_1 z}$$

При введении дополнительных условий

1. $\int\limits_{z_{\min}}^{\infty} y(z)dz = 1;$
2. $y(z) = 0$ при $z = z_{\min};$
3. $y(z) = 0$ при $z \to \infty.$

и после ряда преобразований, а также после перехода от ***СВ Z*** к модульным коэффициентам,

Дифференциальное уравнение распределения плотности вероятности по Пирсону III типа

получается выражение для функции плотности вероятности

$$y(k)\begin{cases}0 & \text{при} \quad k \le k_{min} \\ \dfrac{\beta^{\alpha}(k-k_{min})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp\left[-\beta(k-k_{min})\right] & \text{при} \quad k > k_{min}\end{cases}$$

где ***Г(·)*** – гамма – функция; ***α*** и ***β*** – параметры распределения, связанные с C_v и C_s случайной величины с соотношениями

$\alpha \approx (2/C_s)^2$ и $\beta \approx 2/(C_s \cdot C_v)$

(Пояснение к Гамма – функции. Если действительная часть числа *z* положительна, то можно пользоваться следующей формулой для расчета Гамма – функции)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

Дифференциальное уравнение распределения плотности вероятности по Пирсону III типа

Минимальное значение модульного коэффициента определяется по формуле $k_{min} = 1 - 2C_v / Cs$

Из этого следует, что

$$C_s = 2C_v \text{ при } k_{\min} = 0,$$

$$C_s > 2C_v \text{ при } k_{\min} > 0,$$

$$C_s < 2C_v \text{ при } k_{\min} < 0.$$

Т. о., дифференциальная кривая распределения *Пирсона III типа* при $C_s = 2C_v$ начинается с нуля; при $C_s > 2C_v$ с какого – то положительного числа и при $C_s < 2C_v$ уходит в область отрицательных чисел.

Интегральное распределение Пирсона III типа

Зная C_s и C_v можно получить численные значения параметров k_{min}, α, β и записать выражение для вычисления обеспеченностей модульных коэффициентов

$$P(k) = \int_k^\infty y(s)ds = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^\infty (s - k_{\min})^{\alpha - 1} \exp[-\beta(s - k_{\min})] ds$$

где s – переменная интегрирования

В случае $C_s = 2C_v$, то $k_{min} = 0$, $\alpha = 1/C_v^2$, $\beta = 1/C_v^2$ и диф. и интегральное уравнения существенно упрощаются

$$y(k)\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} k^{\alpha-1} \exp(-\alpha k) \qquad P(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^\infty s^{\alpha-1} \exp(-\alpha s) ds$$

Первое из уравнений называется ***двухпараметрическим гамма – распределение*** или ***Г-распределением***

Интегральное распределение Пирсона III типа

Однако в общем случае, если Пирсона III типа выражается не упрощенной формулой,

$$P(k) = \int_k^{\infty} y(s)ds = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_k^{\infty} (s - k_{min})^{\alpha - 1} \exp[-\beta(s - k_{min})] ds$$

то она является трехпараметрической и однозначно определяется параметрами C_s и $2C_v$, а третий параметр m_x необходимо знать для перехода от модульных коэффициентов в значениям ***СВ Х.***

Кривая имеет нижний предел k_{min} и не ограничена верхним пределом. При $C_s \to \infty$ кривая Пирсона III типа стремиться к нормальному распределению.

Численно решить уравнения Пирсона III типа сложно, поэтому ординаты кривой обеспеченности представляются в виде таблицы.

Распределение Крицкого – Менкеля

Кривая Пирсона III типа широко используется в гидрологии, но при $C_s < 2C_v$ она уходит в область отрицательных значений.

Одно из решений этой проблемы найдено Крицким и Менкелем. В качестве исходной кривой распределения они взяли кривую Пирсона III типа при $C_s = 2C_v$.

$$G(z) = \frac{\alpha^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z s^{\alpha-1} e^{-\alpha s} ds$$

где ***G(z)*** – интегральная функция гамма – распределения;

s – переменная интегрирования;

$C_s = 2C_v$ и $\alpha = 1/C_{v,z}$

$$\bar{z} = 1$$

Распределение Крицкого – Менкеля

Крицкий и Менкель изменили аргумент z в новую переменную $k = az^b$

где a и b – параметры. При этом предполагалось, что ***МО*** новой переменной равно единице, т.е. **$M[k] = M[az^b] = 1$**

С учетом сказанного и после ряда преобразований Крицкий и Менкель получили новое распределение с плотностью вероятности

$$f(k) = \frac{\alpha^{\alpha}}{a^{\alpha/b}\Gamma(\alpha)b} e^{-\alpha(k/a)^{1/b}} k^{(\alpha/b)-1}$$

Распределение Крицкого – Менкеля

Начальный момент ***i* – го** порядка этого распределения связан с параметрами ***α, a, b*** соотношением

$$\mu_i = \frac{\Gamma(\alpha + ib)a^i}{\Gamma(\alpha)\alpha^{ib}}$$

Из этого выражения следует, что

$$M[k] = \mu_1 = \frac{\Gamma(\alpha + b)a}{\Gamma(\alpha)\alpha^b}$$

Так как **M[k]= 1**, то приравняв это выражение к 1, получаем, что

$$a = \frac{\Gamma(\alpha)\alpha^b}{\Gamma(\alpha + b)}$$

Подставляя значение ***a*** по этой формуле в выражение

$$f(k) = \frac{\alpha^\alpha}{a^{\alpha/b}\Gamma(\alpha)b} e^{-\alpha(k/a)^{1/b}} k^{(\alpha/b)-1}$$

Крицкий и Менкель получили выражение, которое

Распределение Крицкого – Менкеля

описывает функцию плотности распределения вероятности через ***Г***-функцию, то есть теперь трехпараметрическое гамма-распределение стало двухпараметрическим, так как зависит от параметров ***a*** и ***b***, которые с учетом формулы

$$\mu_i = \frac{\Gamma(\alpha + ib)a^i}{\Gamma(\alpha)\alpha^{ib}}$$

могут быть выражены через второй и третий начальные моменты. В свою очередь μ_2 и μ_3 могут быть выражены через ***Cs*** и C_v.

Распределение является двухпараметрическим, но для того чтобы перейти от модульных коэффициентов к искомой величине ***СВ Х***, необходимо знать третий параметр - m_x. Поэтому, это распределение называется трехпараметрическим.

Ординаты этой функции распределения также представляются в виде таблицы. Таблицы составлены в модульных коэффициентах и позволяют определить значение $k_{p\%}$ в зависимости от Cs/C_v, C_v и расчетной обеспеченности ***p%***.

Распределение Крицкого – Менкеля

Основные особенности кривой Крицкого и Менкеля:

-кривая плотности вероятности является одно - модальной с положительной асимметрией

- нижним пределом кривой является нуль

- кривая не ограничена верхним пределом

- при $\boldsymbol{C_s = 2C_v}$ кривая превращается в двухпараметрическое ***Г-***распределение, т.е. совпадает с кривой Пирсона III типа

Распределение Джонсона

Если исходную ***СВ X*** преобразовать по формуле

$$z = \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$$

то новая ***СВ Z*** будет иметь нормальное распределение, где ***a*** и ***b*** соответственно нижний и верхний предел ***СВ X.***

Плотность распределения Джонсона имеет вид

$$f(x) = \frac{b-a}{\sigma_z\sqrt{2\pi}(x-a)(b-x)}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_z^2}\left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)-m_x\right]^2\right\}$$

Это распределение является четырех параметрическим и помимо параметров ***a*** и ***b*** содержит еще два параметра: $\boldsymbol{m_z}$ и $\boldsymbol{\sigma_z}$.

Распределение Джонсона

При расчете ординат кривой обеспеченности Джонсона используются таблицы нормированной нормально распределенной ***СВ t***, но при расчете m_z и σ_z. (при известных ***a*** и ***b***) исходный ряд преобразуется по формуле

$$z = \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$$

Если все 4 параметра известны, то по таблице для нормированной нормально распределенной ***СВ t*** определяется нормированная ордината t_p затем вычисляется z_p определяется значение x_p по формуле

$$x_p = \frac{b\exp(z_p)+a}{\exp(z_p)+1}$$

На практике значения верхних и нижних пределов известны очень редко. Поэтому, параметры приходится определять методом последовательных приближений на основе наилучшего соответствия эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей.

Графическое представление функций распределения на клетчатке вероятностей

- На клетчатке вероятностей по оси абсцисс ***откладываются значения обеспеченности в %.*** По оси ординат - ***либо значение исследуемой СВ, либо ее модульные коэффициенты, либо ее нормированные значения.***
- Клетчатка вероятностей м. б. построена только для распределений с ***двумя изменяемых параметра:*** ***обычно*** m_z и ***СКО.*** Доп. параметры, такие как ***Cs***, должны быть постоянными. Для 3-параметрического распределения нужно иметь клетчатку вероятностей для каждого соотношения C_s/C_v.
- Наиболее распространенной является клетчатка вероятностей для нормального закона распределения (при котором $C_s = 0$).
- Для нормальный закон распределения, в качестве исходных принимается кривая обеспеченности с параметрами:

$$\bar{k} = 1 \qquad C_v = 1 \qquad C_s = 0$$

Основные характеристики функций распределения, используемых в гидрологических расчетах

Тип распределения	Число параметров	Область изменения аргумента	Примечание
Равномерное	2	$[a, b]$	Прямоугольное
Нормальное	2	$(-\infty, +\infty)$	Симметричное
Логнормальное…	2	$[0, +\infty)$	Асимметричное
Трехпараметрическое логнормальное	3	$[a, +\infty)$	Асимметриное, $a \geq 0$ при $C_s \geq 3C_v + C_v^3$
Гумбеля	2	$(-\infty, +\infty)$	Асимметричное
Пирсона III типа	3	$[a, +\infty)$	Асимметричное, $a \geq 0$ при $(C_s / C_v) \geq 2$
Крицкого–Менкеля	3	$[0, +\infty)$	Асимметричное
S_b-Джонсона	4	$[a, b]$	Асимметричное, $a \leq x_{\min}$; $b > x_{\max}$

Рекомендации
по выбору кривой распределения

- Выбор типа функции распределения нужно производить ***с учетом области изменения ее аргумента***

- Для заведомо положительных величин (расход воды, слой осадков и т.д.) наиболее подходящими будут кривые логнормального распределения, Крицкого и Менкеля, Пирсона III типа, имеющие нижний предел, но не ограниченные сверху

- Для температуры воды или воздуха больше подходят кривые распределения с диапазоном изменения от $-\infty$ до $+\infty$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!