Функции. Предел функции

Понятие функции

Функция – это соответствие между множествами X и Y, при котором каждому элементу множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y.

$$y = f(x), \text{ где } x \in X, y \in Y$$

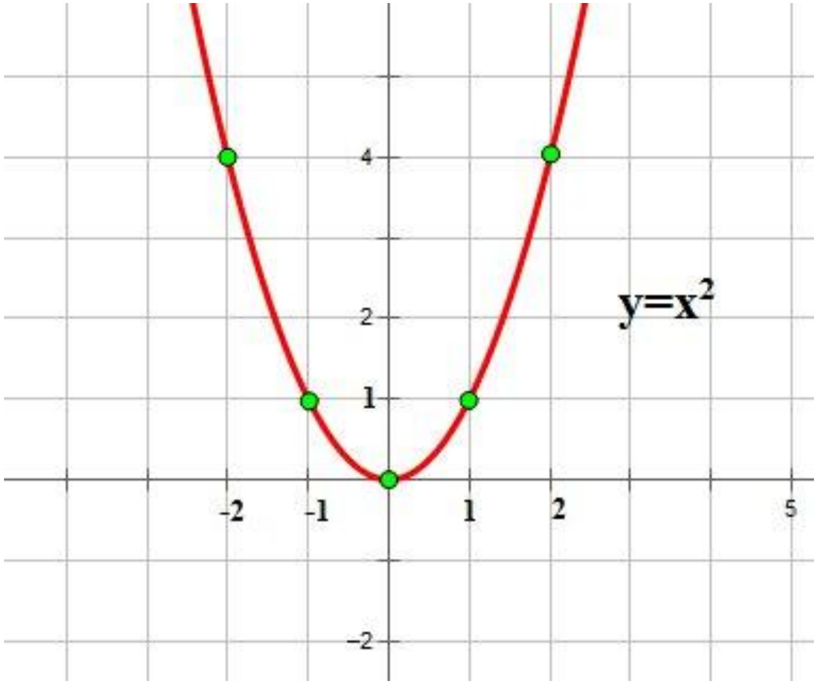
y – зависимая переменная (функция),
x – независимая переменная (аргумент).

Способы задания функции

1. Аналитический

$$y = f(x): \quad y = x^2$$

2. Графический



3. Табличный

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Основные свойства функций

1) **Область определения.** Множество значений аргумента, при которых функция имеет смысл.

$$x \in D$$

2) **Область значений.** Множество значений, которые принимает сама функция.

$$y \in E$$

3) **Ограниченность.** Функция *y=f(x)* называется ограниченной, если существует такое число *M*, что для всех *x* из области определения справедливо:

$$|f(x)| \leq M$$

Основные свойства функций

4) Монотонность. Возрастание или убывание функции.

Функция называется возрастающей, если для пары значений $x_1 < x_2$ справедливо неравенство: $f(x_1) \le f(x_2)$

Функция называется убывающей, если для пары значений $x_1 < x_2$ справедливо неравенство: $f(x_1) \ge f(x_2)$

5) Четность. Функция называется четной, если для любого $x \in D$ справедливо равенство: $f(-x) = f(x)$

Функция называется нечетной, если для любого $x \in D$ справедливо равенство: $f(-x) = -f(x)$

Основные свойства функций

6) Периодичность. Функция называется периодичной с периодом $T \neq 0$, если для любого $x \in D$ выполняется равенство: $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$

7) Нули функции. Значения аргумента, при которых функция равна нулю. $f(x) = 0$

8) Экстремумы функции. Значения аргумента, при которых функция принимает максимальные/минимальные значения

$$f(x) = \max$$
$$f(x) = \min$$

Предел функции

Пусть функция *f(x)* определена на некотором открытом интервале *X*, содержащем точку *x=a*.

Число *L* называется **пределом** функции *f(x)* при $x \to a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что:

$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon$ при условии $0 < \left| x - a \right| < \delta$

Обозначение: $$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Свойства пределов

1) Предел суммы функций равен сумме пределов:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

2) Предел постоянной величины равен самой постоянной величине: $\lim\limits_{x\to a} C = C$

3) Предел произведения функции на постоянную величину. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a} Cf(x)=C\lim_{x\to a} f(x)$$

Свойства пределов

4) Предел произведения функций равен произведению пределов:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

5) Предел частного от двух функций равен отношению пределов при условии, что предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \quad \text{при } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Свойства пределов

6) Предел степенной функции:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^p = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^p$$

7) Предел показательной функции:

$$\lim_{x\to a} A^{f(x)} = A^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}, \quad где\ A > 0$$

8) Предел логарифмической функции:

$$\lim_{x\to a} \log_A f(x) = \log_A \lim_{x\to a} f(x), \quad где\ A > 0$$