

# Основы математической обработки информации

Семестр: 1

Лекции: 6

Практические занятия: 10

Контрольная работа: 1

Зачёт

# Лекция 2. Дискретные и непрерывные модели Аппроксимация

**§0. Фракталы. Поиски новых  
размерностей**

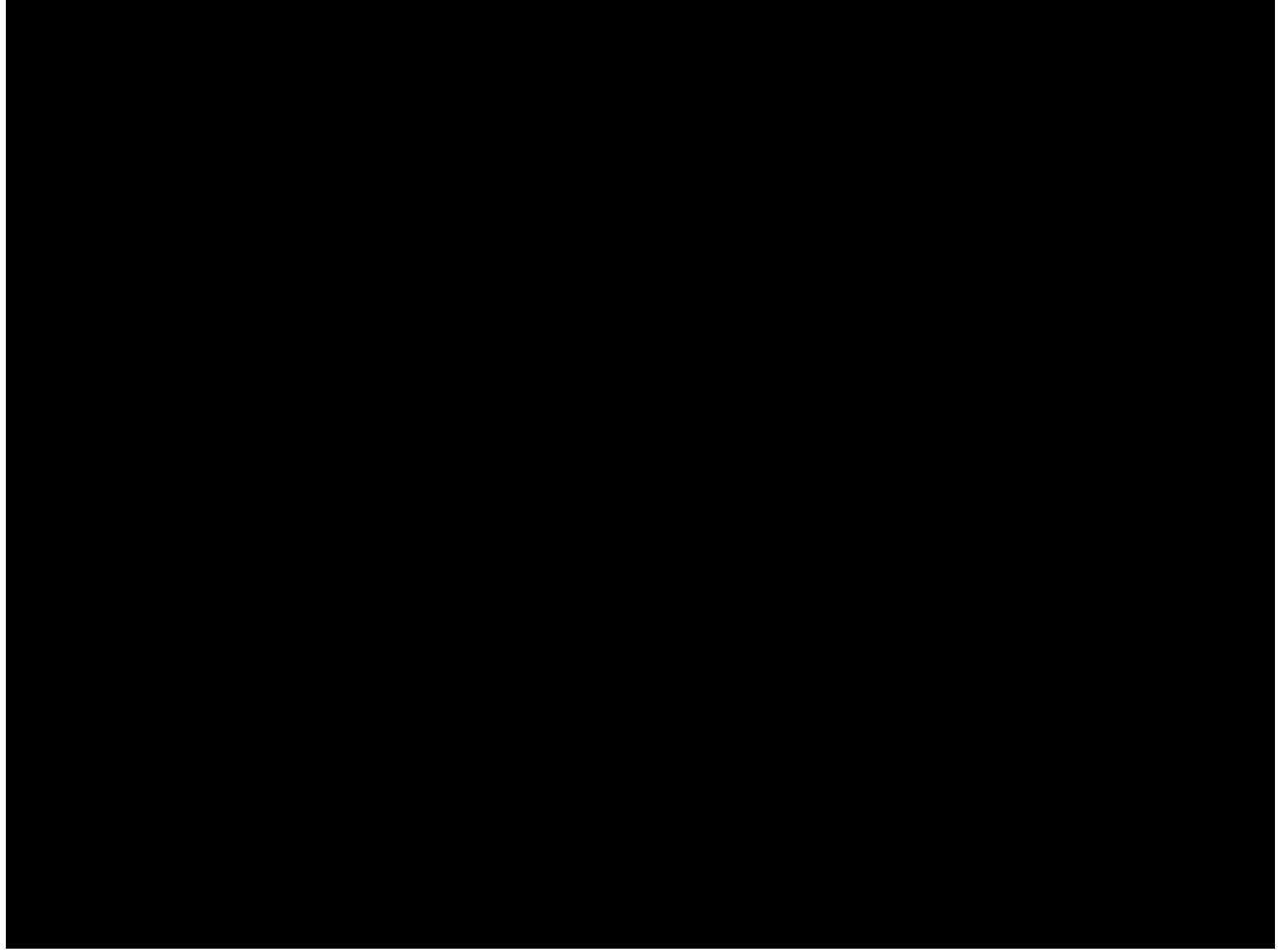
**§1. Задача о размножении кроликов  
Последовательности**

**§2. Задача о ступеньках из домино  
Ряды**

**§3. Задача о площади сектора  
Функции**

**§4. Задача об эксплуатации автомобиля  
Аппроксимация**

# Фракталы. Поиски новых размерностей.



# §1. Задача о размножении кроликов



Леона́рдо Пиза́нский  
1170-1250



## §1. Задача о размножении кроликов

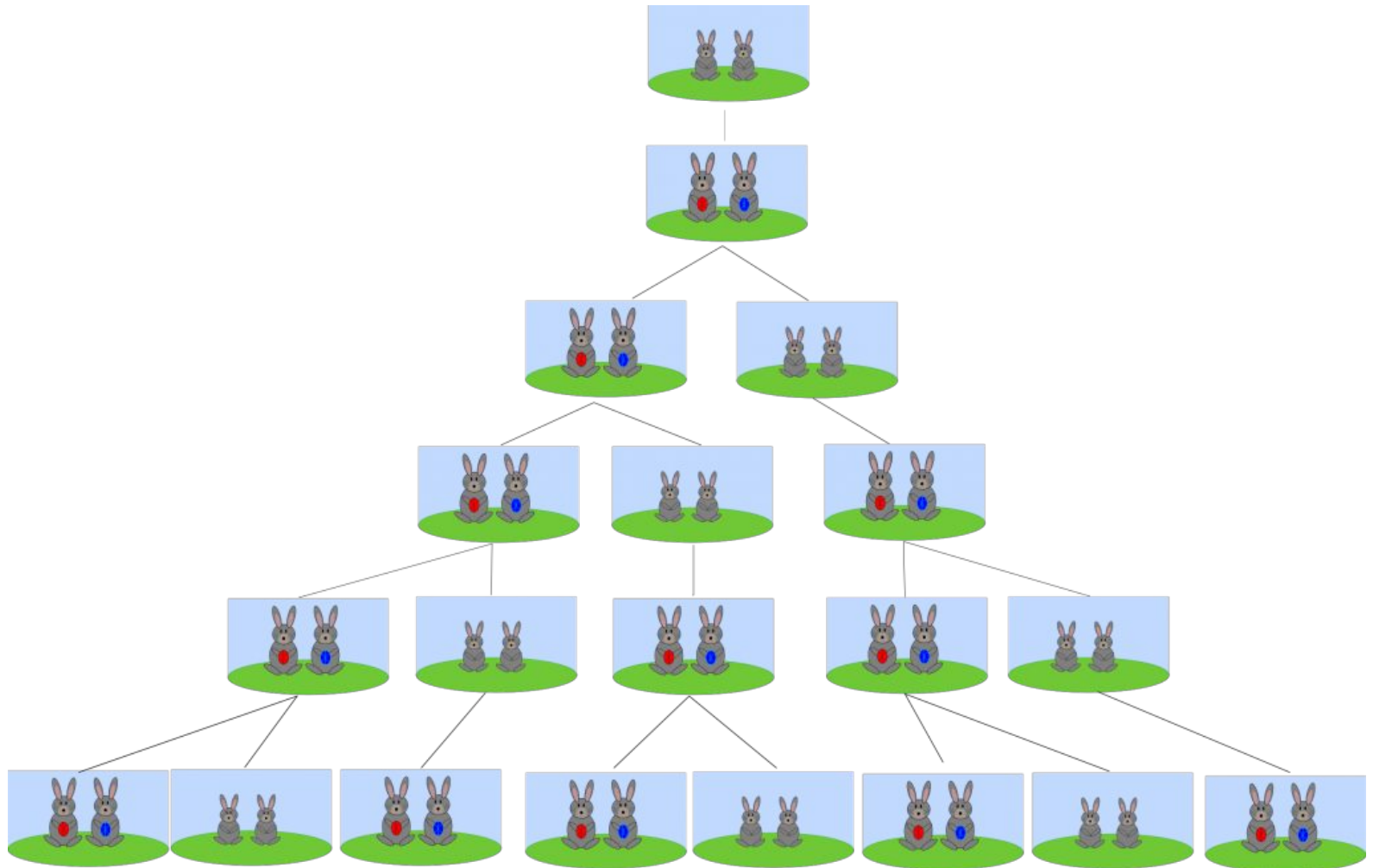
В своей книге «*Liber Abaci*» (1202) Леонардо Пизанский, известный как Фибоначчи, рассматривает развитие идеализированной (биологически нереальной) популяции кроликов, предполагая, что:

- изначально есть новорожденная пара кроликов (самец и самка);
- со второго месяца после своего рождения кролики начинают спариваться,
- и каждый месяц производить новую пару кроликов;
- кролики никогда не умирают.

Сколько пар кроликов будет через  $n$  месяцев?



# §1. Задача о размножении кроликов



## §1. Задача о размножении кроликов

Обозначим через  $A$  пару зрелых кроликов, а через  $B$  – пару новорожденных кроликов. Тогда процесс «размножения» может быть описан с помощью двух «переходов»:

$A \rightarrow AB$  моделирует ежемесячное превращение каждой зрелой пары кроликов  $A$  в две пары, а именно в ту же самую пару зрелых кроликов  $A$  и новорожденную пару кроликов  $B$ ;

$B \rightarrow A$  моделирует процесс «созревания» кроликов, когда новорожденная пара кроликов  $B$  через месяц превращается в зрелую пару  $A$ .

# §1. Задача о размножении кроликов

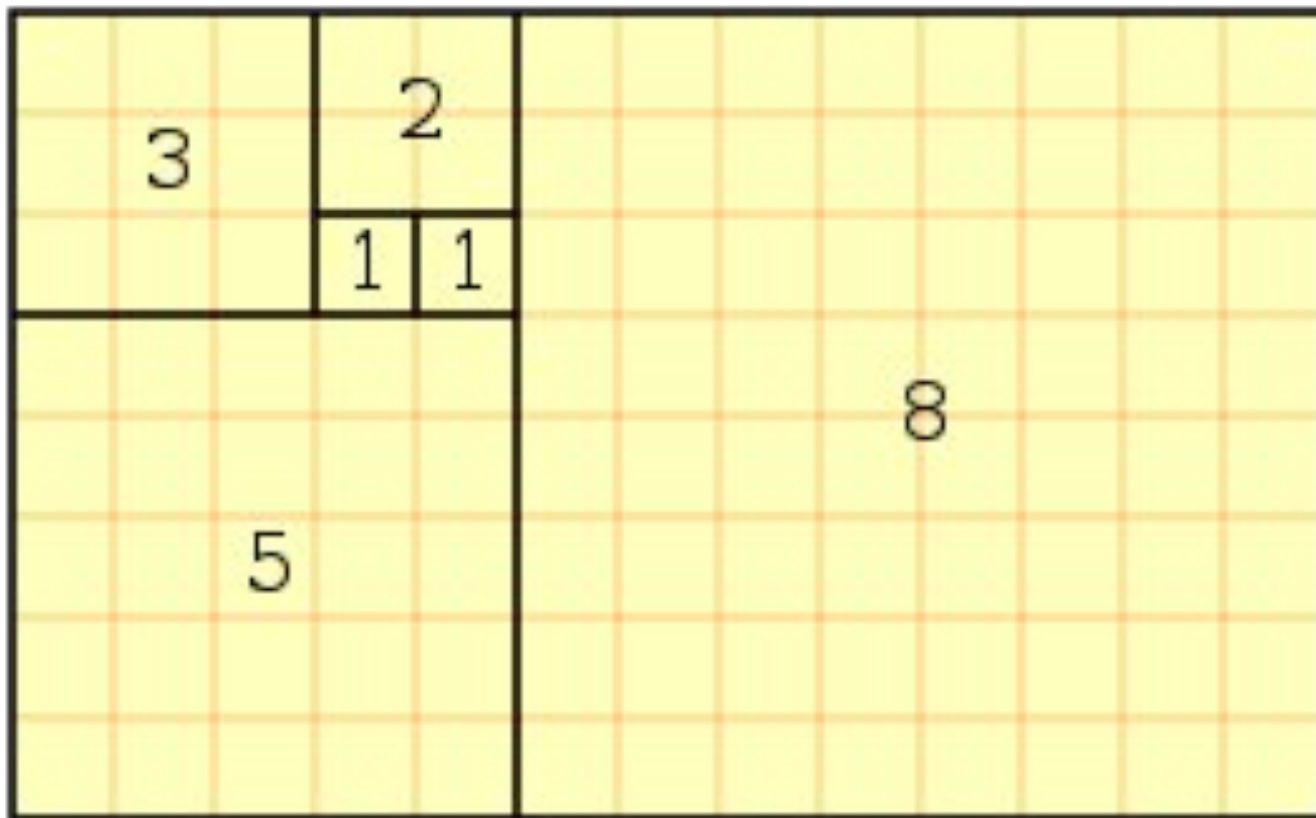
Дата	Пары кроликов	A	B	A+B
1-го января	A	1	0	1
1-го февраля	AB	1	1	2
1-го марта	ABA	2	1	3
1-го апреля	ABAAB	3	2	5
1-го мая	ABAABABA	5	3	8
1-го июня	ABAABABAABAAB	8	5	13



# §1. Задача о размножении кроликов

## Последовательности

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1, n \in \mathbb{N}$$



# §1. Задача о размножении кроликов

## Последовательности

**Последовательность** – числовая функция натурального аргумента.

$$\{a_n \mid a_n = f(n), \forall n \in \mathbb{N}\}$$

### Способы задания последовательности

- описание;
- перечисление элементов;
- формула общего члена;
- рекуррентная формула;
- графически.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

# §1. Задача о размножении кроликов

## Последовательности

### Свойства последовательностей

- стационарность;
- цикличность;
- монотонность;
- ограниченность.

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \dots$$

### Операции над последовательностями

- сложение;
- вычитание;
- умножение;
- деление;
- умножение на число.

# §1. Задача о размножении кроликов

## Последовательности

### Частные случаи последовательностей

- арифметическая прогрессия:  $a_{n+1} = a_n + d$   

$$a_n = \frac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$$
- геометрическая прогрессия:  $b_{n+1} = b_n \cdot q, q \neq 0$   

$$b_n = \sqrt{b_{n+k} \cdot b_{n-k}}$$

### Предел последовательности

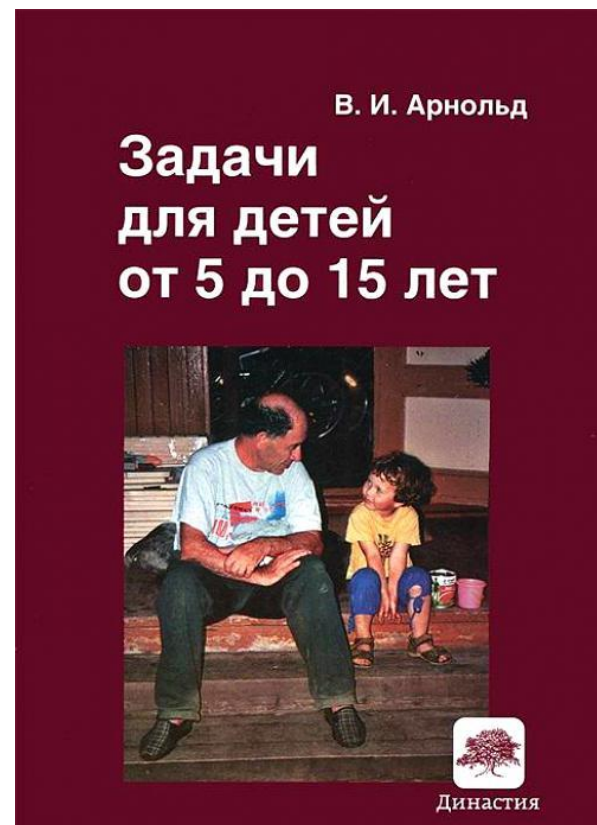
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots \rightarrow 1$$

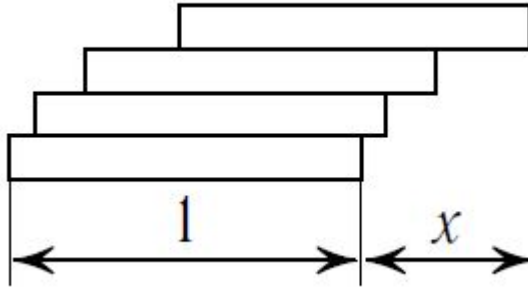
## §2. Задача о ступеньках из домино



Владимир Игоревич Арнольд  
12 июня 1937 — 3 июня 2010



## §2. Задача о ступеньках из домино



16. Положив (нужным образом) друг на друга несколько одинаковых пластинок (например, костяшек домино), можно образовать навес длиной  $x$  костяшек. Каково наибольшее достижимое значение длины навеса  $x$ ?



## §2. Задача о ступеньках из домино

**35** Пусть имеется неограниченный запас одинаковых кирпичей, которые кладутся друг на друга с некоторым сдвигом так, чтобы конструкция не падала. На какое наибольшее расстояние конец последнего кирпича может отстоять от начала первого (рис. 24)?

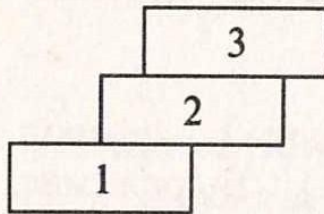


Рис. 25

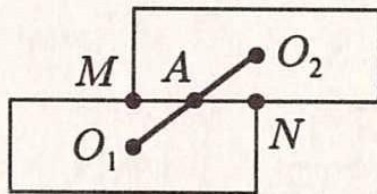


Рис. 26

*В формулировке задачи содержится некий отвлекающий момент, препятствующий правильной догадке о том, что «крышу» можно сделать бесконечно длинной. В самом деле: если действительно класть кирпичи друг на друга, то, положив два со сдвигом  $1/2$  (считаем длину кирпича равной 1), мы увидим (рис. 25), что дальше-то некуда: если хоть немного сдвинуть 3-й кирпич относительно 2-го, пирамида рухнет.*

*Поступим иначе: станем подсовывать кирпичи друг под друга; тогда стратегия будет состоять в том, чтобы после добавления очередного кирпича центр тяжести всей конструкции проецировался в край нижнего кирпича.*

*Тогда второй кирпич по-прежнему можно сдвинуть относительно первого на  $1/2$ . Если  $O_1$  и  $O_2$  — центры тяжести кирпичей (рис. 26), то их общий центр тяжести находится в точке  $A$ , делящей отрезок  $MN$  пополам и отстоящей от края второго кирпича на  $1/4$ .*

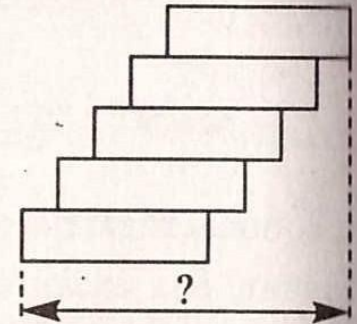


Рис. 24

## §2. Задача о ступеньках из домино Ряды

Значит, третий кирпич можно сдвинуть относительно второго на  $1/4$ . Если  $O_3$  — центр тяжести третьего кирпича (рис. 27), то общий центр тяжести системы из трех кирпичей находится в точке  $B$ , такой что  $O_3B : BA = 2 : 1$  (правило рычага). Значит, точка  $B$  делит отрезок  $M_1N_1$  (равный половине длины кирпича) в отношении  $2:1$ ,

т. е.  $M_1B = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ , тогда  $BN_1 = \frac{1}{6}$  и четвертый кир-

пич можно сдвинуть относительно третьего на  $1/6$ . Аналогично устанавливается, что для следующего центра имеем пропорцию  $O_4C : CB = 3:1$  и, значит, пятый кирпич можно сдвинуть на  $1/8$ , и т. д.

Тогда общий сдвиг составит величину  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} +$

$\frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , а поскольку ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится, крыша может быть бесконечно длинной.

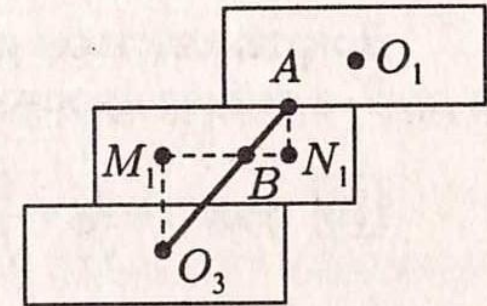


Рис. 27



## §2. Задача о ступеньках из домино

### Ряды

**Ряд** – это бесконечная сумма.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

### Виды рядов

- числовые ряды;
  - положительные;  $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
  - знакопеременные;
  - знакочередующиеся;
- функциональные;  $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 
  - степенные;
  - тригонометрические;
  - ...

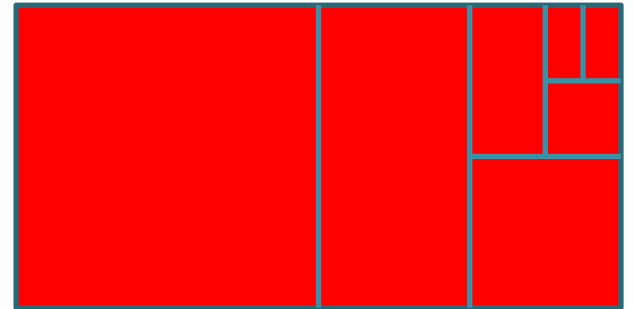
## §2. Задача о ступеньках из домино Ряды

### Вычисление (исследование) рядов

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_1, S_2, S_3, S_4, \dots \rightarrow S$$



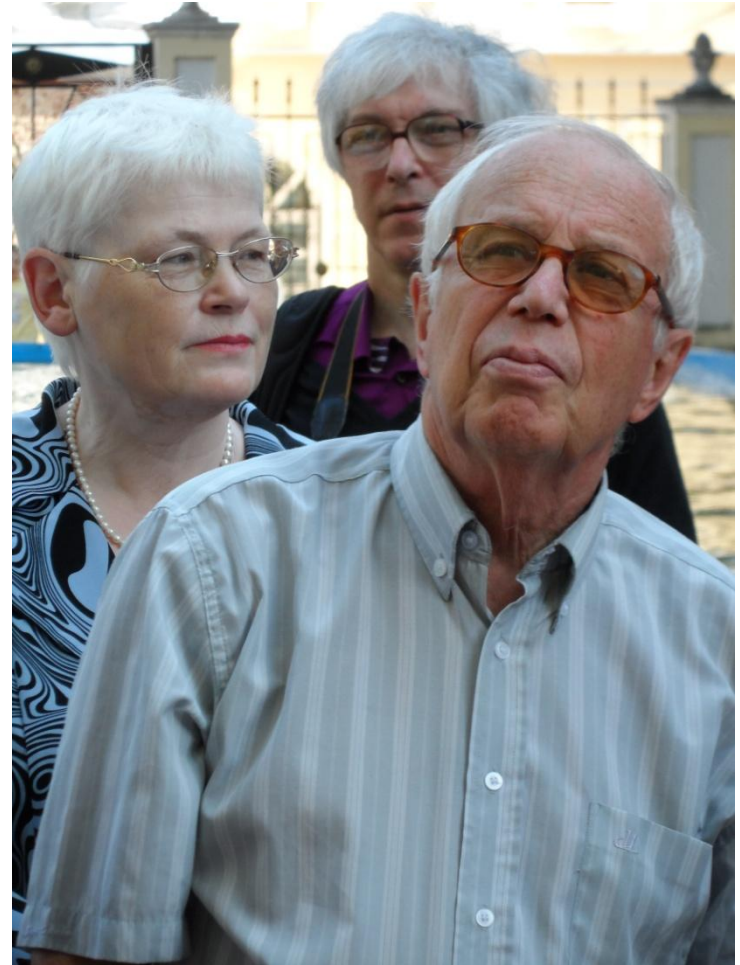
$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

$$S_2 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{7}{4}, S_4 = \frac{15}{8}, \dots, S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \dots \rightarrow 2$$

## §3. Задача о площади сектора



Мордкович  
Александр Григорьевич



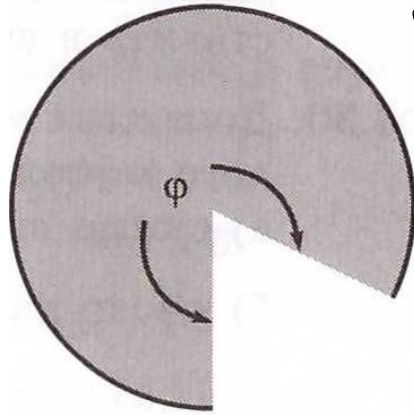


Рис. 6

### §3. Задача о площади сектора

- 7.4. На рисунке 6 изображен сектор круга, радиус которого равен 1, а центральный угол равен  $\varphi$ , причем  $\varphi \in (0; 2\pi)$ .
- Выразите площадь  $S$  этого сектора как функцию угла  $\varphi$ :  $S = S(\varphi)$ .  
Постройте график функции  $S = S(\varphi)$ .
  - Вычислите значение функции  $S = S(\varphi)$  при  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .
  - Найдите  $S(2) - S(1)$ .
  - Найдите  $S(\varphi + \delta) - S(\varphi)$ .



## §3. Задача о площади сектора Функции

**Числовой функцией** с областью определения  $D$  называется **зависимость**, при которой каждому числу из множества  $D$  ставится в соответствие единственное число  $y$ , обычно обозначаемое  $y=f(x)$ .

### Способы задания функций

- описание;
- табличный;
- графический;
- аналитический.

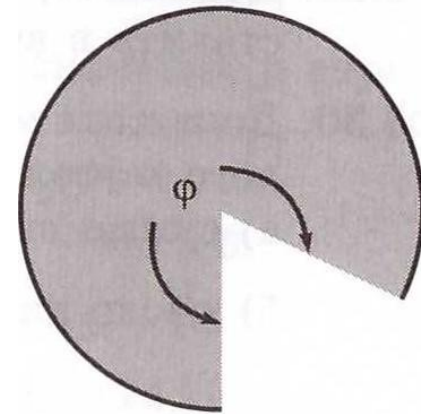


Рис. 6

## §3. Задача о площади сектора Функции

### Свойства функций

- монотонность;
- ограниченность;
- чётность/нечётность;
- периодичность.

### Операции над функциями

- сложение;
- вычитание;
- умножение;
- деление;
- умножение на число;
- суперпозиция.

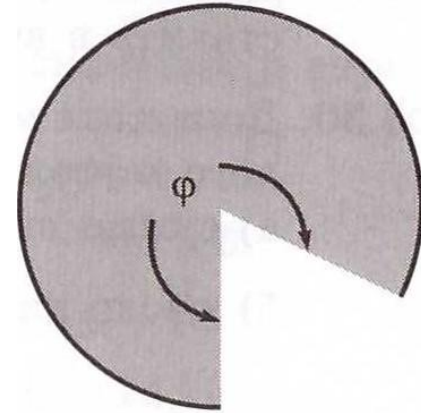


Рис. 6

## §3. Задача о площади сектора Функции

### Основные элементарные функции

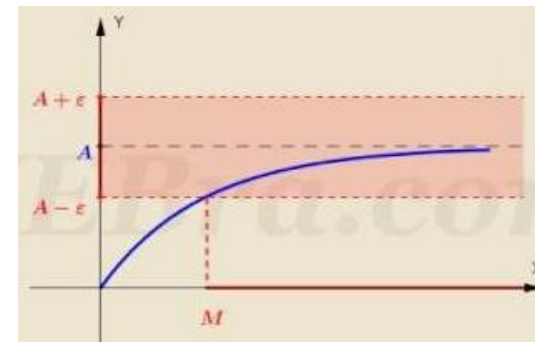
- линейная;
- квадратичная;
- степенная;
- показательная;
- логарифмическая;
- тригонометрические;
- обратные тригонометрические.

## §3. Задача о площади сектора Функции

### Предел функции

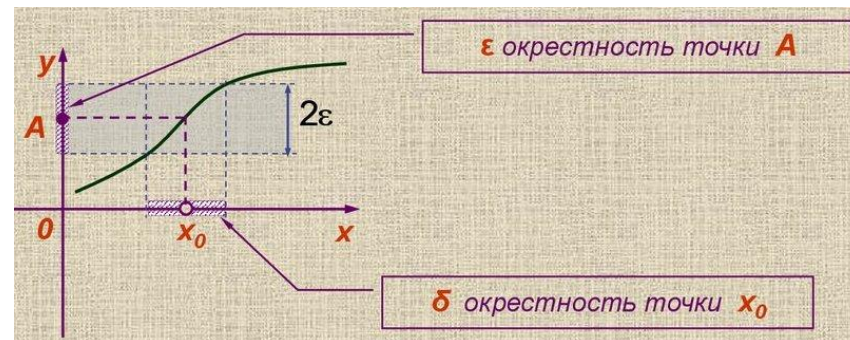
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \geq M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$



## §4. Задача об эксплуатации автомобиля

В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Составьте линейную зависимость стоимости ремонта от срока эксплуатации.

Определите предполагаемую величину затрат на ремонт на 10-й год эксплуатации.

## §4. Задача об эксплуатации автомобиля

### Аппроксимация

**Аппроксимация** (от лат. *proxima* – ближайшая) или **приближение** — научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми.

Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов.



## §4. Задача об эксплуатации автомобиля Аппроксимация

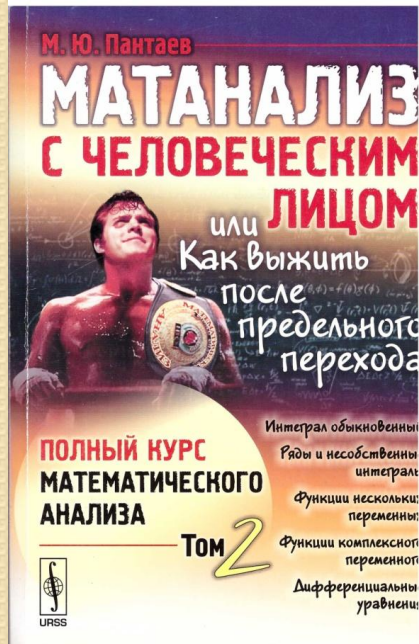
Интерполя́ция **интерпо́лирование** — в вычислительной математике способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Экстраполя́ция, **экстрапо́лирование** — особый тип аппроксимации, при котором функция аппроксимируется вне заданного интервала, а не между заданными значениями.

# §4. Задача об эксплуатации автомобиля

## Аппроксимация

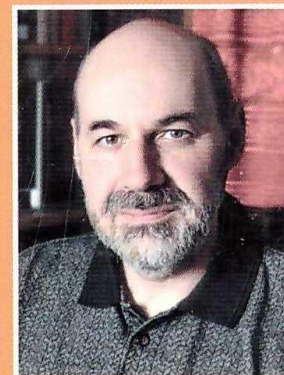
### Метод наименьших квадратов



#### Михаил Юрьевич ПАНТАЕВ

Московский преподаватель математики. Окончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Область научных интересов: перспективы обучения математике нематематиков. Автор и соавтор пособий для школьников и студентов «Практикум по алгебре», «Практикум по планиметрии», «Задачи вступительного экзамена по математике в Московский технический университет связи и информатики»; статей, посвященных вопросу математического просвещения, таких как «О преподавании математики нематематикам», «Душа учителя», «Снегопад», «Проклятая математика» и т. д., а также других сочинений на актуальные темы.

#### Об авторе





## §4. Задача об эксплуатации автомобиля

### Аппроксимация

### Метод наименьших квадратов

Этот метод применяется для согласования между собой слегка противоречащих друг другу данных эксперимента (измерений). Пусть измерены координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и  $y_1, y_2, \dots, y_n$   $n$  точек, которые — теоретически — должны лежать на одной прямой. Как выбрать прямую, которая наилучшим образом соответствует этим точкам?

Пусть  $y = ax + b$  — уравнение искомой прямой; вертикальное отклонение точки  $(x_k; y_k)$  от этой прямой равно  $y_k - ax_k - b$ ; согласно принципу наименьших квадратов, числа  $a$  и  $b$  надо подобрать так, чтобы минимизировать сумму

$$z = (y_1 - ax_1 - b)^2 + (y_2 - ax_2 - b)^2 + \dots + (y_n - ax_n - b)^2$$

как функцию двух переменных  $a$  и  $b$ . Частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial a} = 2(y_1 - ax_1 - b)(-x_1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-x_2) + \dots + 2(y_n - ax_n - b)(-x_n),$$

$$\frac{\partial z}{\partial b} = 2(y_1 - ax_1 - b)(-1) + 2(y_2 - ax_2 - b)(-1) + \dots + 2(y_n - ax_n - b)(-1).$$

Стационарная точка находится из равенств

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n y_k x_k - a \sum_{k=1}^n x_k^2 - b \sum_{k=1}^n x_k = 0, \\ \sum_{k=1}^n y_k - a \sum_{k=1}^n x_k - nb = 0 \end{cases}$$

# §4. Задача об эксплуатации автомобиля

## Аппроксимация

### Метод наименьших квадратов

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

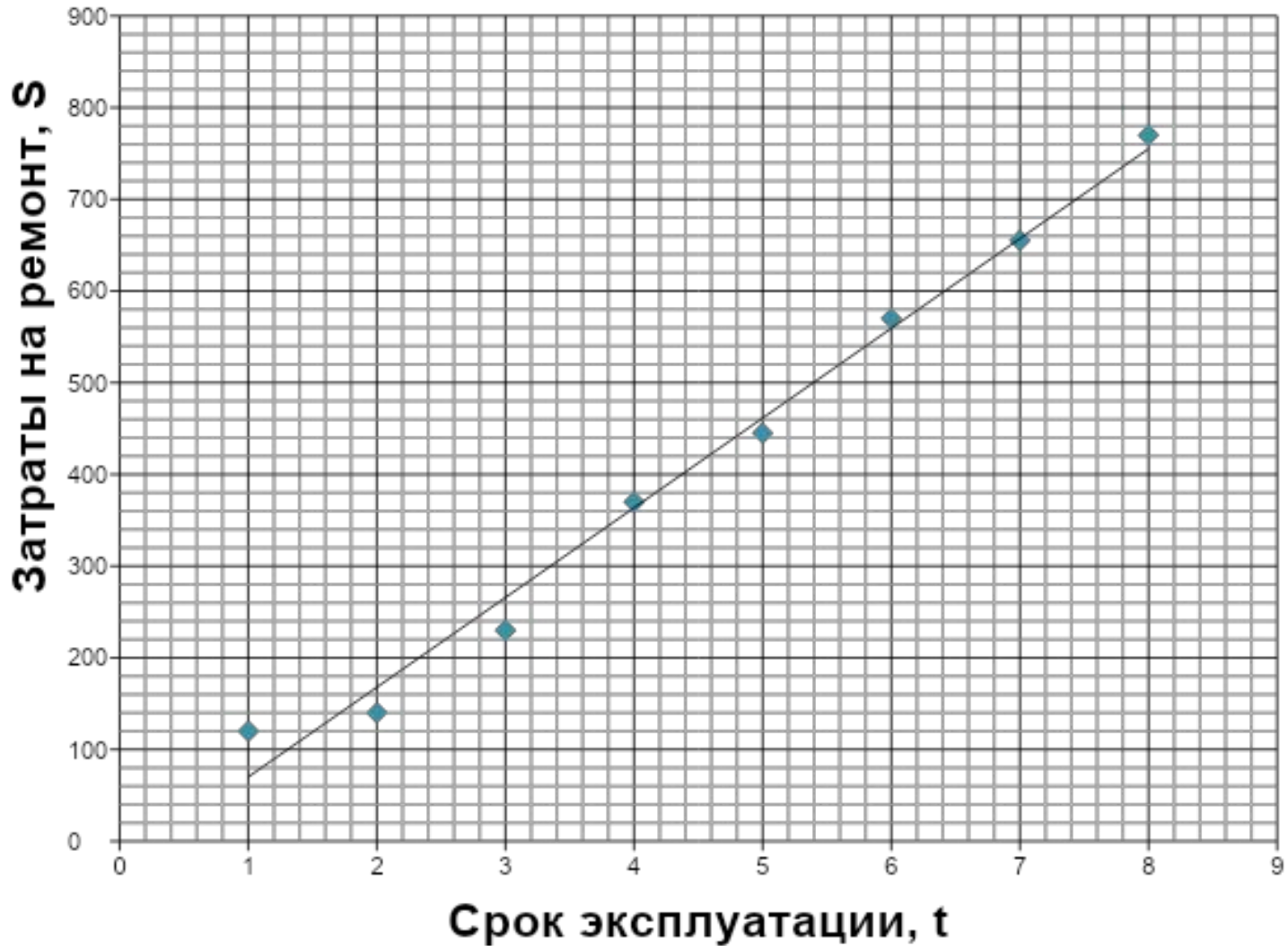
$$S = a \cdot t + b$$

t	S	t <sup>2</sup>	t*S
1	120	1	120
2	140	4	280
3	230	9	690
4	370	16	1480
5	445	25	2225
6	570	36	3420
7	655	49	4585
8	770	64	6160
<b>36</b>	<b>3300</b>	<b>204</b>	<b>18960</b>

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n t_i \cdot S_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i + nb = \sum_{i=1}^n S_i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 204 + b \cdot 36 = 18960, \\ a \cdot 36 + 8 \cdot b = 3300 \end{cases}$$

## §4. Задача об эксплуатации автомобиля Аппроксимация Метод наименьших квадратов



# Основы математической обработки информации

Продолжение следует...