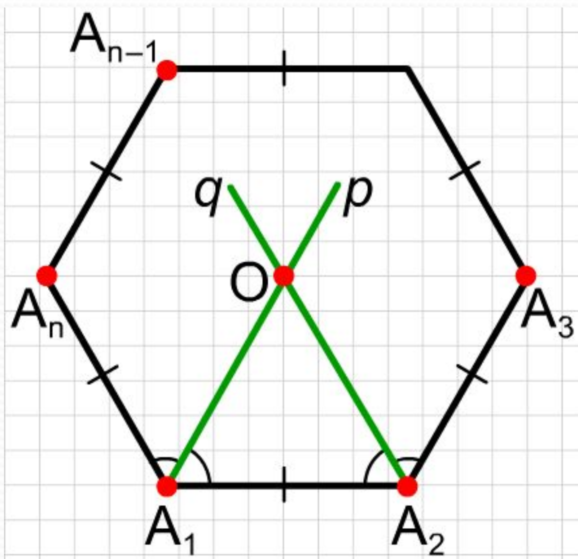
Свойства точки, равноудалённой от вершин многоугольника

Подготовили:
ученики 10-Б класса
Колесник А., Козко А., Логвинов Д., Семерет Д.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны. Центром правильного многоугольника называется точка, равноудаленная от всех его вершин и всех его сторон.

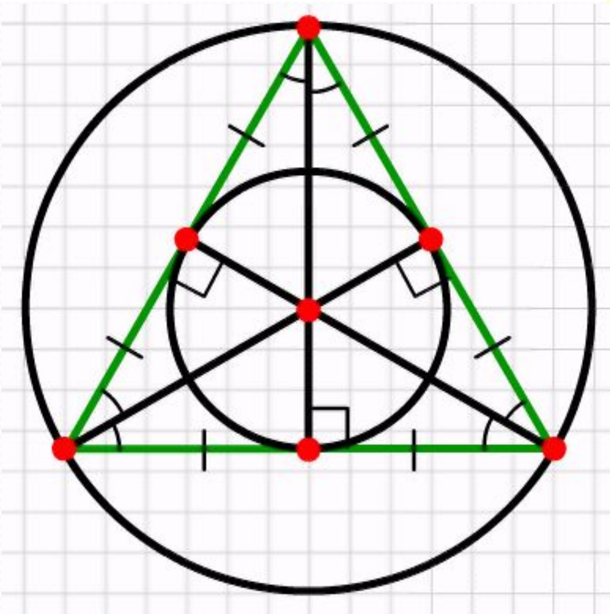
Теорема 1

- В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин.



Доказательство:
Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник (т. е. $A_1A_2 = A_2A_3 = ... = A_{n-1}A_n = A_nA_1$ и $\angle A_1 = \angle A_2 = ... = \angle A_n$). Проведем биссектрисы p и q углов A_1 и A_2. Пусть $p \cap q = O$. Докажем, что точка O является центром правильного n-угольника $A_1A_2...A_n$.

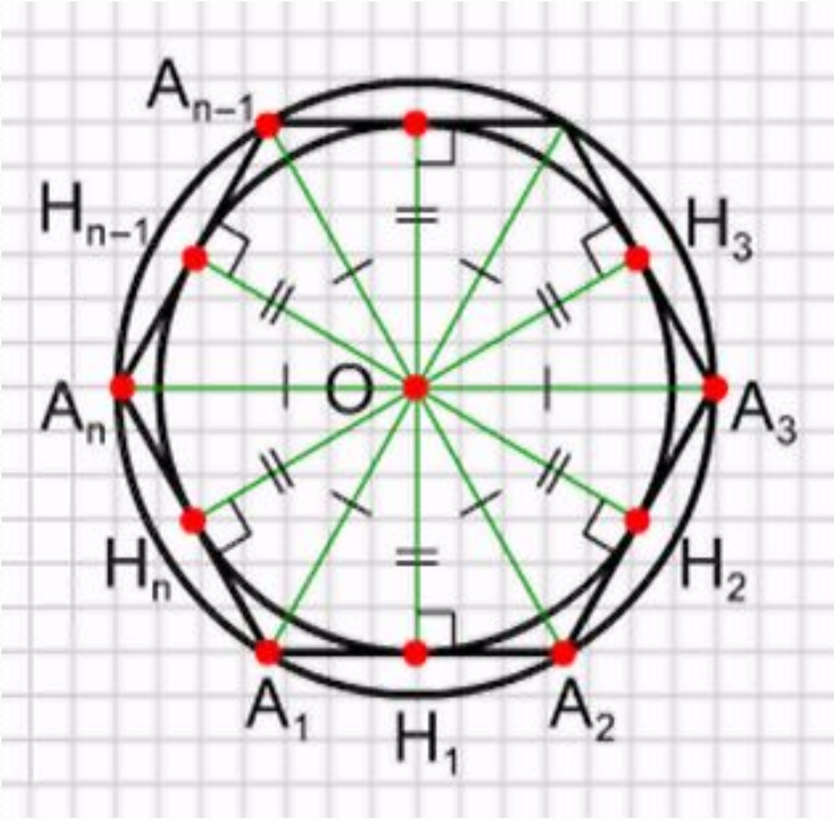
Центр правильного многоугольника



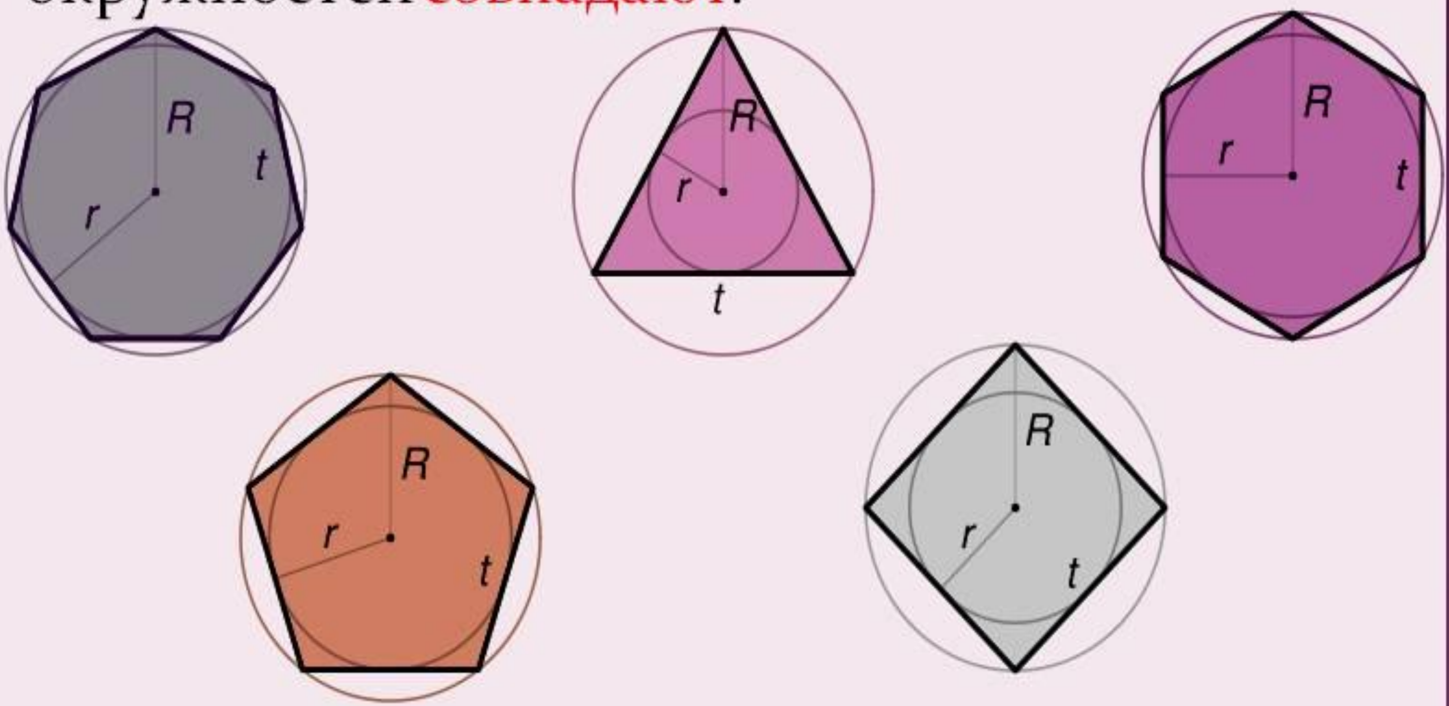
Точка, которая равноудалена от всех вершин и от всех сторон правильного многоугольника, является центром правильного многоугольника.

Например, у равностороннего треугольника на рисунке такой точкой является центр вписанной и описанной окружности (это одна точка, т. к. у равностороннего треугольника все биссектрисы, медианы и высоты совпадают, следовательно, совпадают и точка пересечения биссектрис с точкой пересечения серединных перпендикуляров). Докажем, что центр существует у каждого правильного многоугольника.

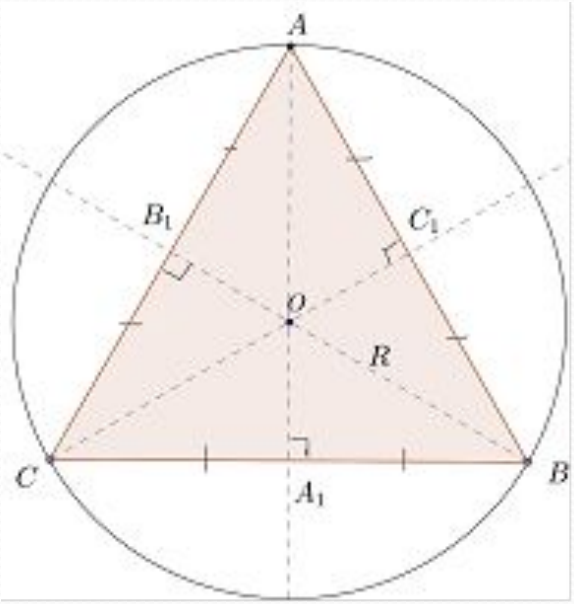
Следствие. Центр окружности, описанной около правильного многоугольника, совпадает с центром вписанной в него окружности.



- Правильный многоугольник является вписанным в окружность и описанным около окружности, причем центры этих окружностей совпадают.

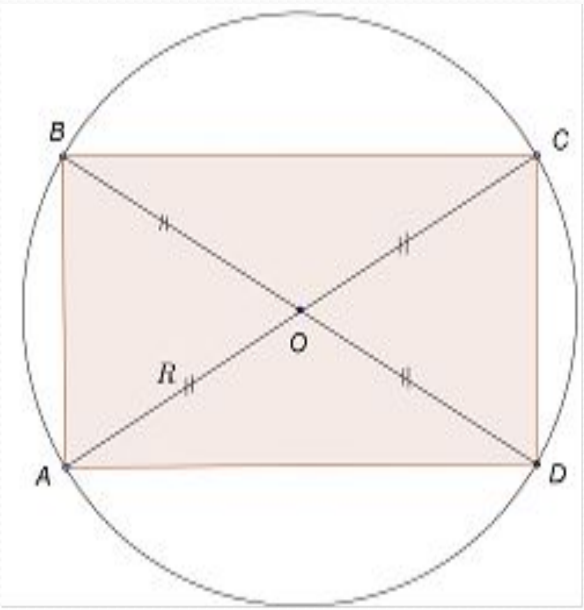


Пример 1



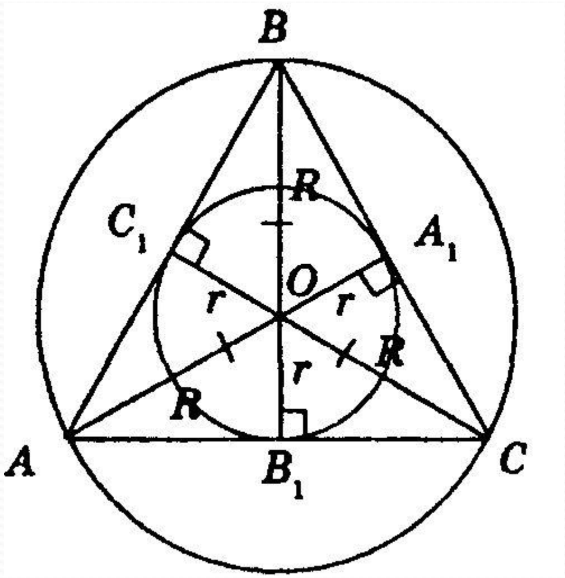
- Правильный треугольник ($n = 3$)
- Известно, что около любого треугольника ABC, в том числе правильного, можно описать окружность . Ее центр лежит на пересечении серединных перпендикуляров. В случае правильного треугольника на серединных перпендикулярах лежат и биссектрисы, и медианы, и высоты. Точка O равноудалена от всех вершин треугольника

Пример 2



- Дан пример окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$. Диагонали прямоугольника пересекаются в точке O, равноудаленной от его вершин, при этом расстояние от этой точки до любой вершины равно радиусу окружности:
- $OA = OB = OC = OD = R$.

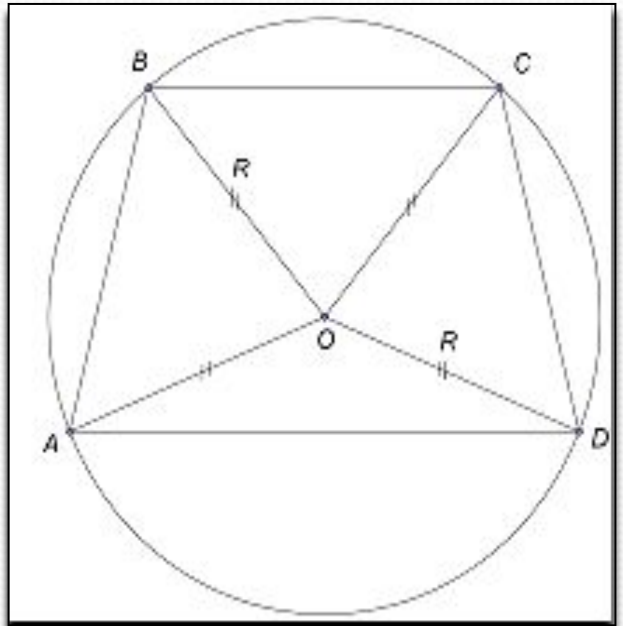
Пример 3. Равносторонний треугольник



Точка O равноудалена от вершин треугольника: A, B, C, т. к. точка O – центр вписанной и описанной окружностей

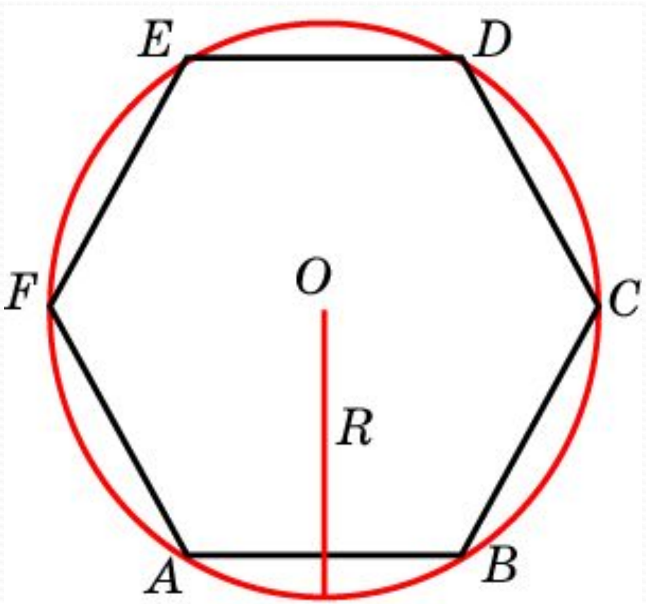
OA=OB=OC=R

Пример 4. Равнобедренная трапеция



- Следующий пример – равнобедренная трапеция $ABCD$. Как известно, около такой трапеции можно описать окружность, т. е. существует такая точка O, которая равноудалена от всех вершин трапеции:
- $OA = OB = OC = OD = R$.

Пример 5. Шестиугольник



Точка O равноудалена от вершин шестиугольника:

A, B, C, D, E, F, т. к. точка O – центр вписанной и описанной окружности

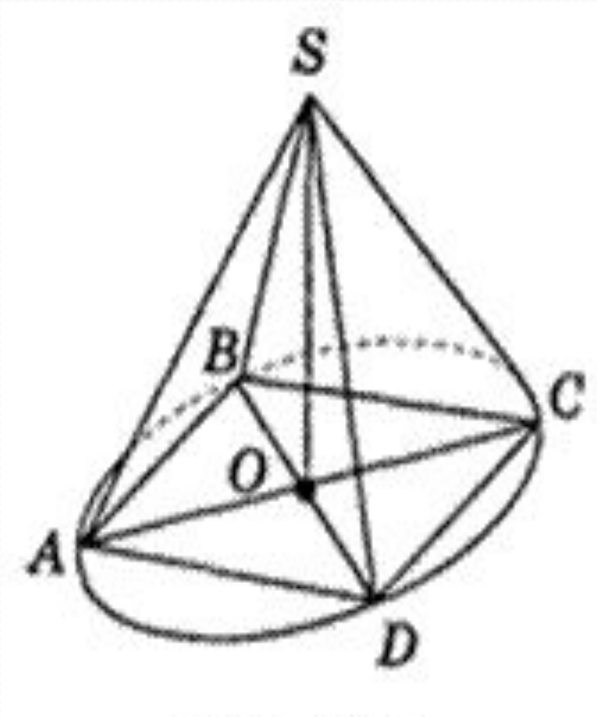
OA=OB=OC=OD=OE=OF=R

Свойство точки, равноудаленной от вершины многоугольника

Теорема 2.

Если через центр окружности, описанной вокруг многоугольника, проведено прямую, перпендикулярную к плоскости многоугольника, то каждая точка этой прямой равноудалена от вершин многоугольника.

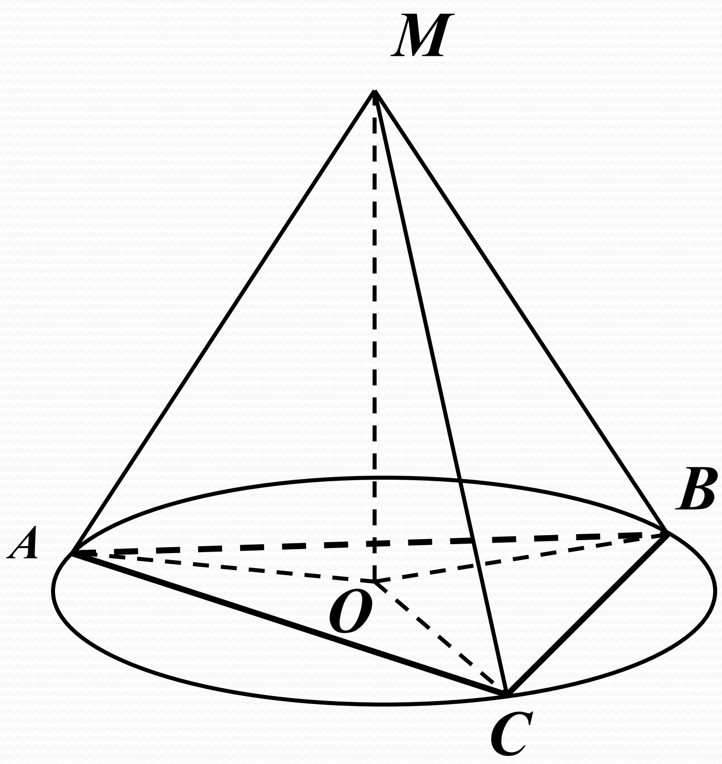
Доказательство теоремы



Пусть ABCD - данный четырехугольник, для точки S пространства SA = SB = SC = SD и SOABC. Докажем, что точка O - центр окружности, описанной вокруг ABCD.

1. ΔASO = ΔBSO = ΔCSO = ΔDSO (из равенства гипотенузы и катета: SO - совместный, AS = BS = CS = DS - по условию).
2. Из равенства треугольников следует, что AO = BO = CO = DO, т. е. точка O - центр окружности, описанной вокруг четырехуголь-ника ABCD.

Свойство точки, равноудаленной от вершин многоугольника

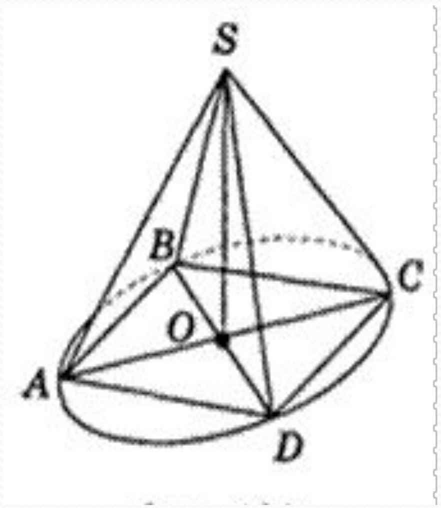


Если точка, не лежащая в плоскости выпуклого многоугольника, равноудалена от вершин многоугольника, то основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, является центром окружности, описанной около многоугольника.

Если прямая, перпендикулярная плоскости многоугольника, проходит через центр описанной около многоугольника окружности, то каждая точка этой прямой равноудалена от вершин многоугольника.

Доказательство теоремы

Пусть ABCD - четырехугольник, вокруг которого описана окружность с центром в точке O, и OS(ABC).

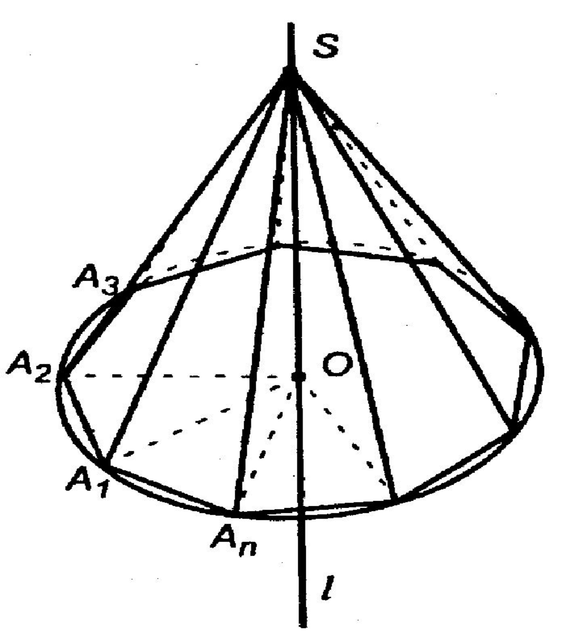


Докажем, что SA = SB = SC = SD .

ΔASO = ΔBSO = ΔCSO = ΔDSO (за двумя катетами: SO - общая, AO = BO = CO = DO).

Из равенства треугольников следует, что SA = SB = SC = SD.

Свойство точки, равноудаленной от вершины многоугольника

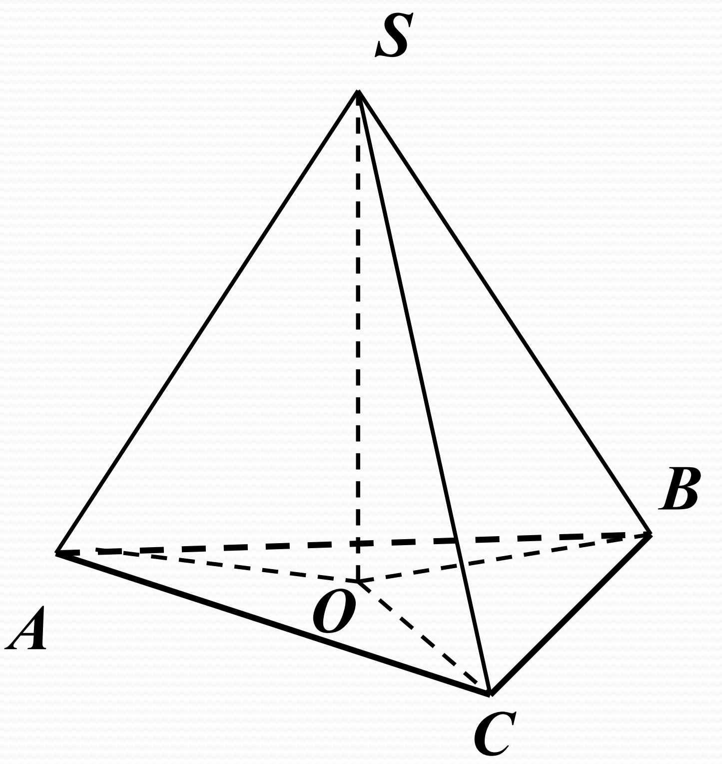


Теорема

Если некоторая точка равноудалена от вершин многоугольника, то основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость многоугольника, совпадает с центром окружности, описанной вокруг многоугольника.

Задача 1.

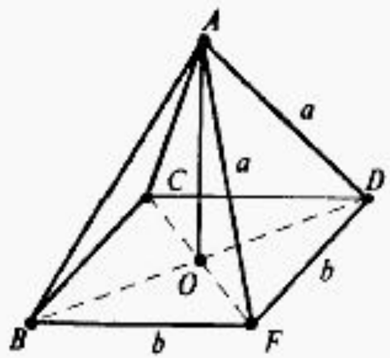
Точка О равноудалена от вершин правильного треугольника со сторонами 6 см и удалена от плоскости треугольника на 8 см. Найдите расстояние от точки О до вершины треугольника S.



Задача сводится к нахождению высоты правильной треугольной пирамиды. Вершина проектируется в центр основания, т.е. в точку пересечения медиан. По теореме Пифагора находится расстояние, как величина гипотенузы в прямоугольном треугольнике, где один катет - это высота пирамиды, а второй катет равен 2/3 высоты основания. Ответ: 5

Задача 2

- Расстояние от точки A до вершин квадрата равны a. найти расстояние от точки A до плоскости квадрата, если сторона квадрата равна b.

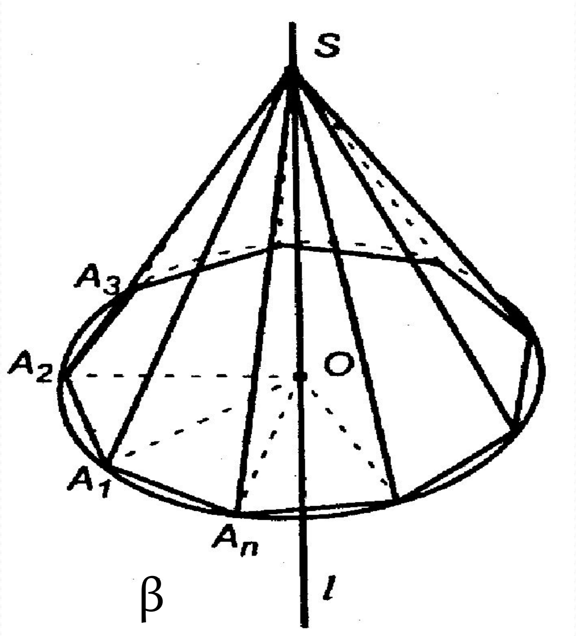


Пусть AO перпендикуляр, опущенный из точки A на плоскость квадрата. Поскольку AB = AC = AD = AF, то и OB = OC = =OD = OF и, значит, O — точка пересечения диагоналей. Тогда $OF = \frac{1}{2} CF = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Далее треугольник AOF — прямоугольный. Так что

$$AO = \sqrt{AF^2 - OF^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

Задача 3

Пусть SO L a - данная прямая, а β - плоскость многоугольника



Пусть на плоскости β имеется вписанный в окружность n-угольник (не обязательно правильный n-угольник); т. О -центр описанной окружности.

Решение задачи

Рассмотрим ΔA_1OS, ΔA_2OS, …, ΔA_nOS. Они - прямоугольные, $OA_1 = OA_2 = \ldots = =OA_n$ - как радиусы окружности, SO - общий катет. Все треугольники равны, поэтому наклонные SA_1, SA_2, …, SA_n тоже равны. Это суть утверждение задачи.

Рассмотрим ΔA_1OS, ΔA_2OS, …, ΔA_nOS.

Они - прямоугольные, $OA_1 = OA_2 = \ldots = =OA_n$ - как радиусы окружности, SO - общий катет. Все треугольники равны, поэтому наклонные SA_1, SA_2, …, SA_n тоже равны. Это суть утверждение задачи.

Задача 4

Дано:

Точка М равноудалена от всех вершин равнобедренного прямоугольного треугольника АВС (угол С=90 градусов). АС=ВС=4см. Расстояние от точки М до плоскости треугольника равно 2*sqrt(3) см. Найдите расстояние от точки Е - середины стороны АВ - до плоскости ВМС.

Решение задачи

Поскольку треугольник ABC прямоугольный и равнобедренный, то AE = CE = BE, а это значит, что E - это проекция точки M на плоскость ABC и ME = 2*sqrt(3).
Пусть D - середина BC.
Искомое расстояние будет равно длине перпендикуляра EH, опущенного из точки E к MD.
ED = AC/2 = 2.
Отсюда MD = sqrt(ME^2+ED^2) = sqrt(12+4) = 4.
Прямоугольные треугольники EHD и MED подобны (угол D общий), значит,
ED/MD = EH/ME.
Отсюда
EH = ME/2 = sqrt(3).

Ответ: sqrt(3)