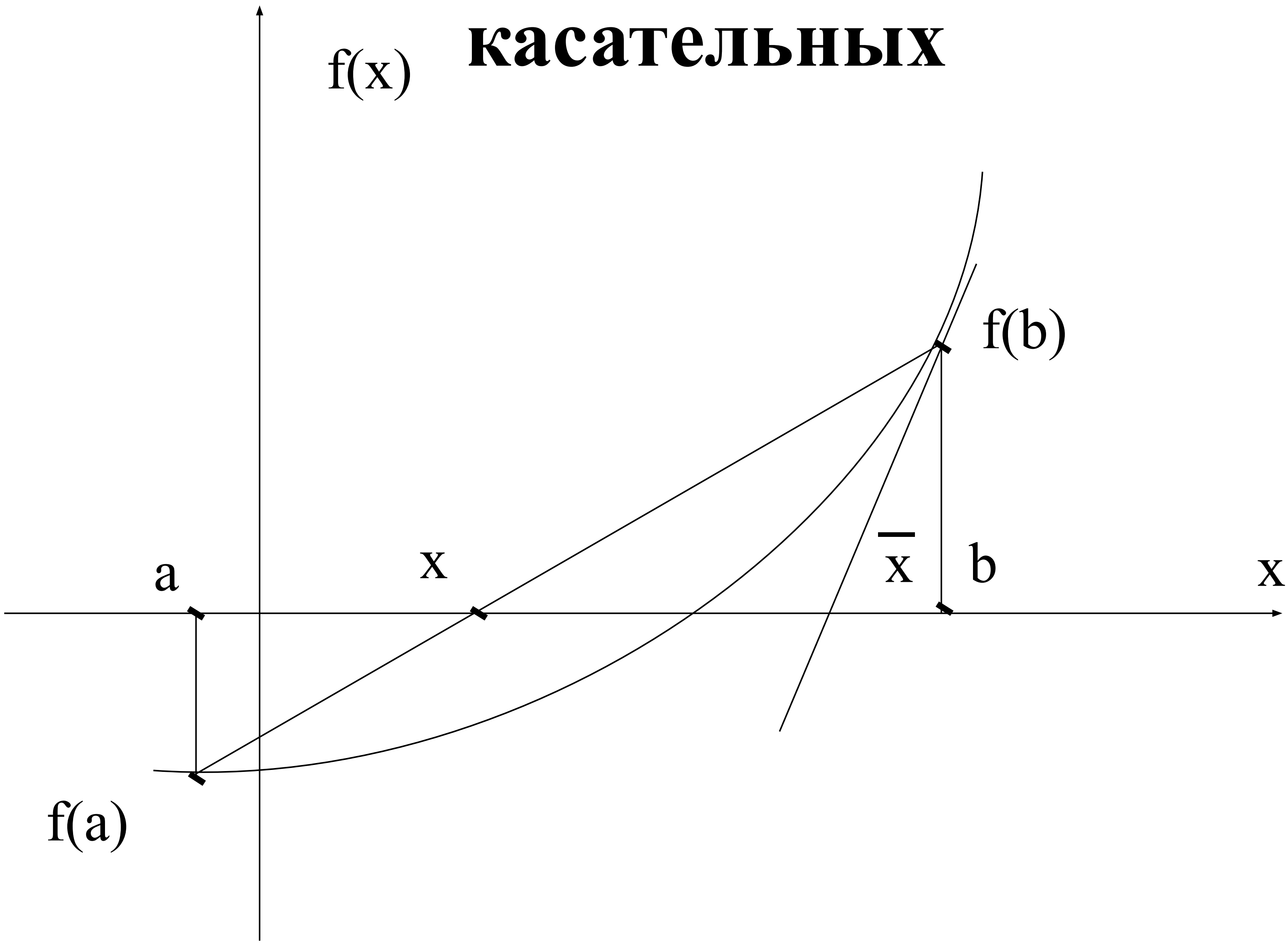
Комбинированный метод хорд и касательных



Суть метода:

Предположим:

1. Что функция на интервале $[a; b]$ определена и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, т.е. $f(a)*f(b)<0$

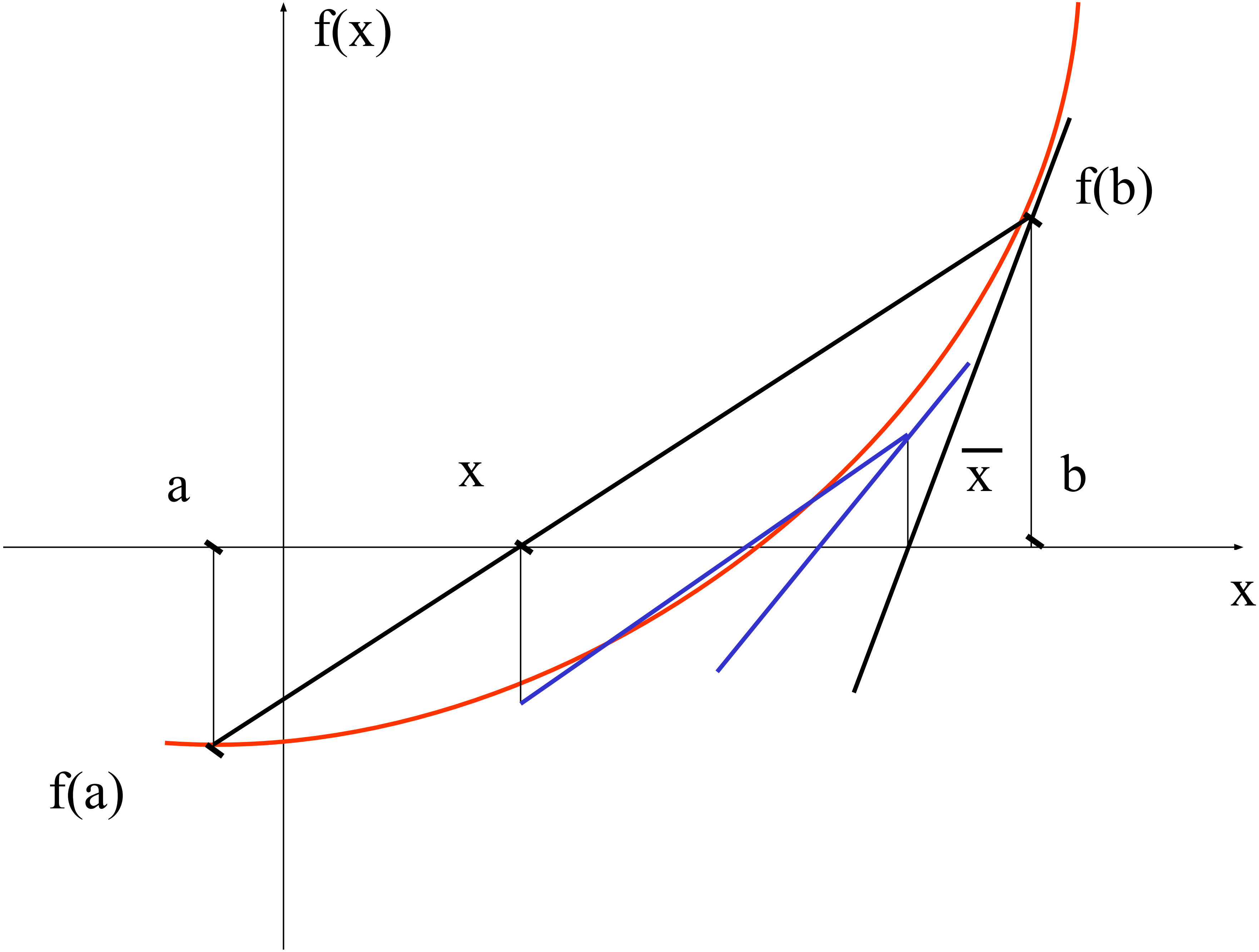
2. Что на отрезке $[a; b]$ вторая производная $f''(x)$ определена и не меняет знак. <u>Тогда приближения к корню, полученные методом хорд и методом касательных, будут на **любом** шаге расположены по разные стороны от корня.</u>

1. В качестве начальной точки для получения приближений по методу касательных выберем тот конец отрезка $[a;b]$, для которого выполняется условие $f''(x_0)\cdot f(x_0)>0$, обозначим его $\bar{x}$, второй конец отрезка $[a;b]$ обозначим x.

2. Вычислим новые значения x и $\bar{x}$:

$$x=\frac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{f(b)-f(a)} \qquad \bar{x}_{n+1}=\bar{x}_n-\frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}$$

3. Если $|x-\bar{x}|\le E$, то задача решена, за приближенное значение корня можно принять величину $X=\dfrac{x+\bar{x}}{2}$. В противном случае переходим к пункту 2.



f(x)
f(b)
a
x
$\overline{x}$
b
x
f(a)

Пример:

Задана функция: $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7;$

Находим производную: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4;$

Определяем корни:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3};$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; \quad x_2 = 2.$$

Составляем таблицу знаков функции :

x	-∞	$-2/3$	2	+∞
Знак f(x)	-	+	-	+

Уравнение имеет три действительных корня:

$$x_1 \in \left(-\infty; -2/3\right]; \quad x_2 \in \left[-2/3;\ 2\right]; \quad x_3 \in \left[2; +\infty\right)$$

Уменьшим промежутки, содержащие корни:

x	-2	-1	0	1	2	3
Знак f(x)	-	+	+	+	-	+

Значит, $x_1 \in [-2; -1]$; $x_2 \in [1; 2]$; $x_3 \in [2; 3]$.

Уточним корни:

1. $x_1 \in [-2; -1]$; .

$$\underline{f(-2) < 0;}\ f(-1) > 0;\ f''(x) = 6x - 4$$

При $-2 \le x \le -1$ $\quad \underline{f''(x) < 0}$

Для расчетов принимаем формулы:

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)}; \qquad x_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}$$

Полагаем, что

$$\bar{x}_0 = -2;\ x_0 = -1$$

Обозначим :

$$h_{1n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f'(\bar{x}_n)};\ h_{2n} = \frac{f(\bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}(x_n - \bar{x})$$

n	$\bar{x}_n$ / x_n	$x_n - \bar{x}_n$	$f(\bar{x}_n)$ / $f(x_n)$	$f'(\bar{x}_n)$	h_{1n} / h_{2n}
0	-2	1			
	-1				
1					
2					

Т.к. $|x-\bar{x}|<E$, вычисления прекращаем,

$x_1 \approx -1{,}935 \qquad f(x_1) \approx 0{,}0001$

2. $x_2 \in [1;\ 2]$, при $1 \le x \le 2$

$\underline{f(1) > 0};\ f(2) < 0;\ \underline{f''(x) > 0}$ Для расчетов применяем те же формулы, полагая $\bar{x}_0 = 1;\ \ x_0 = 2$

3. $x_3 \in [2;\ 3]$, при $2 \le x \le 3$

$$f(2) < 0;\ \underline{f(3) > 0};\ \underline{f''(x) > 0}$$

Для расчетов применяем формулы:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \qquad \bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n - \frac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n)}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)}$$

Полагаем, что $\bar{x}_0 = 2;\ x_0 = 3$

Обозначим $h_{1n} = \dfrac{f(\bar{x}_n)(x_n - \bar{x})}{f(x_n) - f(\bar{x}_n)};\ \ h_{2n} = \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$

n	$\bar{x}_n$		$x_n - \bar{x}_n$	$f(\bar{x}_n)$	$f'(x_n)$
	x_n			$f(x_n)$	
0	2	1			
	3				
1					
2					

h_{1n}

h_{2n}

$$\left| x - \bar{x} \right| < E$$

$$x_1 \approx 2{,}473 \qquad f(x_1) \approx 0{,}0001$$