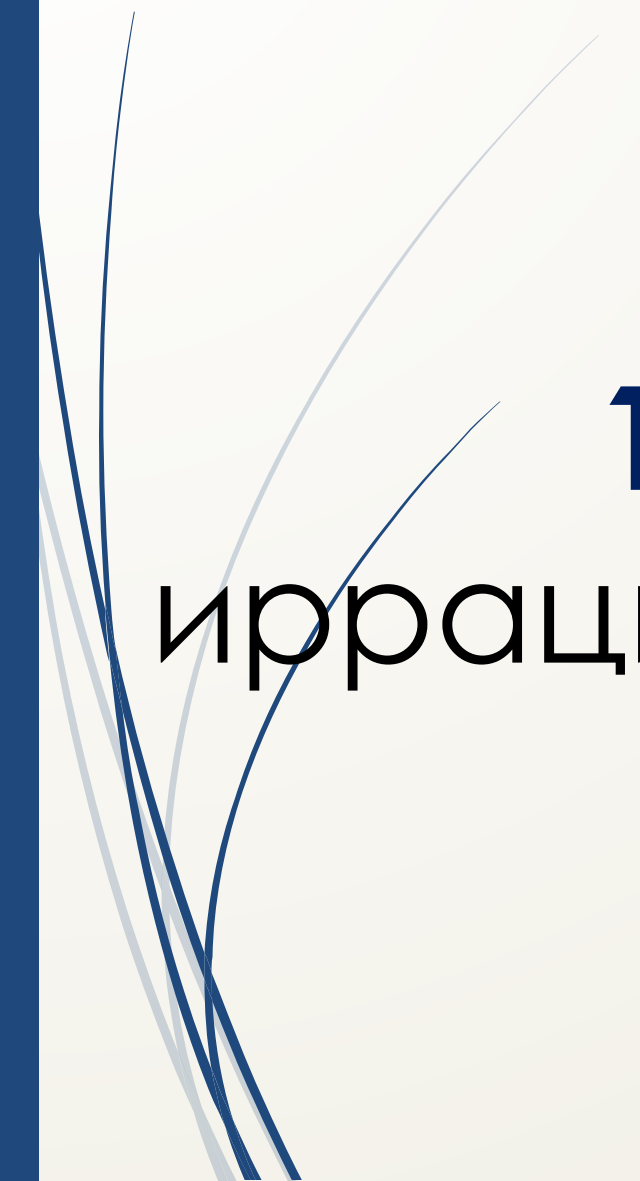




Лекция №2



1.2 Действительные, иррациональные, комплексные числа



Если бесконечная десятичная дробь не периодическая, то она не является рациональным числом.

Иррациональное число (I) – бесконечная десятичная непериодическая дробь.

Иррациональные числа могут быть как положительными, так и отрицательными.

Числа $\sqrt{2}$, $-\sqrt[5]{10}$, и т.д. – иррациональные числа, потому что можно доказать, что они могут быть представлены в виде бесконечных десятичных непериодических дробей.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел.

Действительным числом ($\mathbb{R}$) называется бесконечная десятичная дробь, т.е дробь вида $+a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$ или $-a_0, a_1 a_2 a_3 \dots$, где a_0 - целое неотрицательное число, а каждая из букв $a_1, a_2, a_3, \dots$ - это одна из цифр: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Пример:

- 1) В записи действительного числа $\pi = 3,1416 \dots$ число $a_0 = 3$, а первые четыре десятичных знака : $a_0, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5$
- 2) В записи действительного числа $-\sqrt{234} = -15,297058\dots$, $a_0 = 15, a_1 = 2, a_2 = 9, a_3 = 7$, и т.д

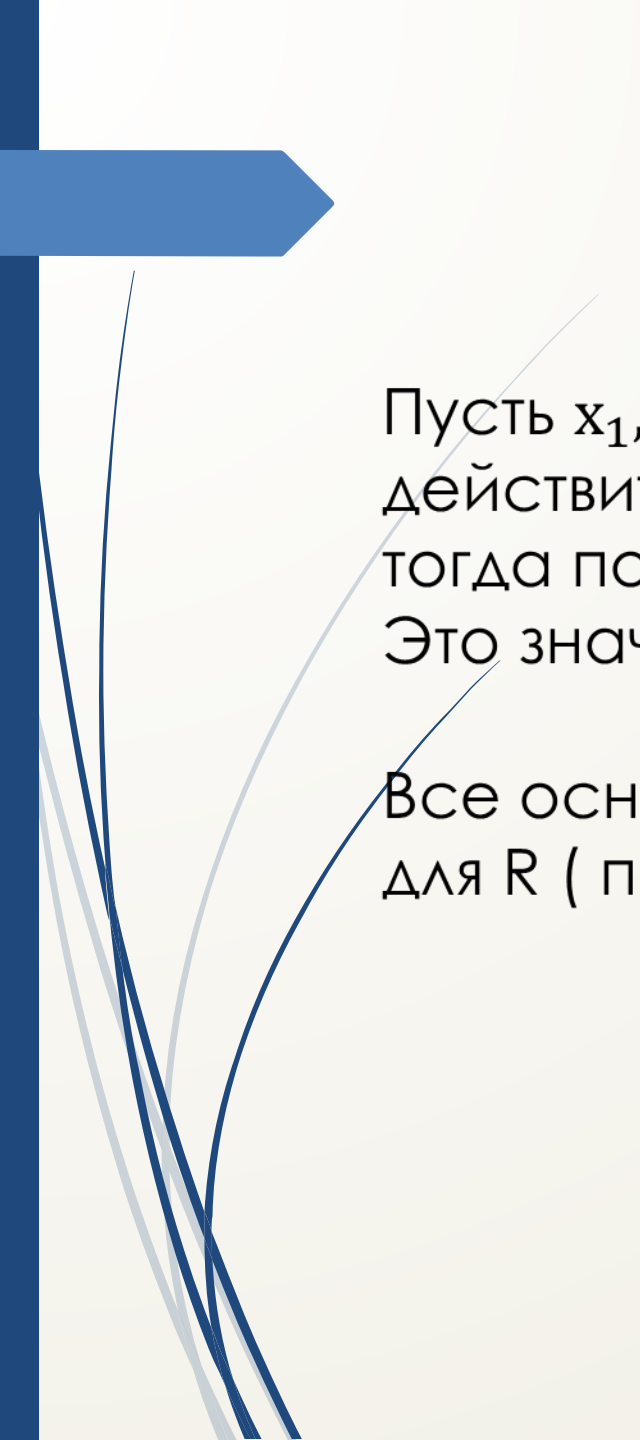


Действительное число может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Арифметические операции над $\mathbb{R}$, т.е. бесконечными десятичными дробями, обычно заменяются операциями над их приближениями.

Пример:

Вычислим приближенные значения
 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 1,4142135\dots + 1,7320508\dots \approx 3,1 \approx 3$



Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ — последовательность приближения действительного числа x с точностью до 1, до 0,1, до 0,01 и т.д. тогда погрешность приближения $|x - x_n| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что x_n приближается как угодно близко к x ($x_n \rightarrow x$)

Все основные законы и правила действий над $\mathbb{Q}$ сохраняются и для $\mathbb{R}$ (переместительный, сочетательный, и т.д.)

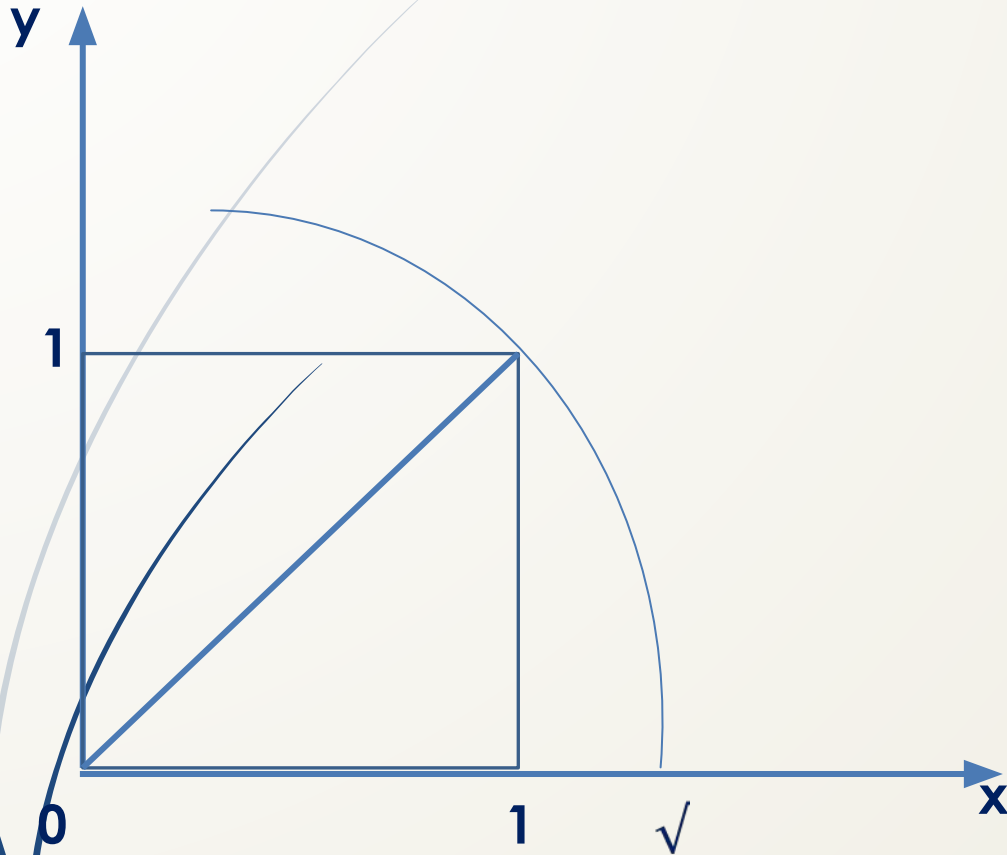
Модуль действительного числа x обозначается $|x|$ и определяется так же, как и модуль рационального числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0, \end{cases}$$

Пример:

$$x = -0,1010010001\dots \Rightarrow |x| = -x = 0,1010010001\dots$$

Геометрически, действительные числа изображаются точками числовой прямой.



Если бы не было $\mathbb{I}$ и соответствующих им точек на координатной оси, то прямая оказалась бы с «дырками». В частности, не было бы точки с координатой $\sqrt{2}$. $\mathbb{R}$ «заполняет» всю числовую прямую: каждому $\mathbb{R}$ соответствует единственная точка числовой прямой и наоборот (каждой точке соответствует единственное $\mathbb{R}$)

На множестве $\mathbb{R}$ не решена проблема извлечения квадратного корня из отрицательных чисел и решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Для того, чтобы уравнение $x^2 + 1 = 0$ имело решение – вводят **мнимую единицу (i)** и считают ее решением уравнения.

Для i справедливо равенство: $i^2 + 1 = 0 \Rightarrow i^2 = -1$

Множество $\mathbb{R}$ дополняется множеством чисел **ЧИСТО МНИМЫХ** вида **ib** , где b – действительное число, i – мнимая единица

Сумма действительного числа **a** и мнимого числа **ib** записывается в виде: **$a + bi$** и называется **КОМПЛЕКСНЫМ ЧИСЛОМ (c)**

Для комплексных чисел вводится понятие равенства и операции сложения и умножения.

Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$

Пример:

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = 2 + 3i, z_3 = 2 - 3i, z_4 = 5 + 3i$$

в данном примере $z_1 = z_2$. У чисел z_1 и z_3 равны действительные части, но мнимые различаются. У чисел z_1 и z_4 мнимые части равны, действительные – различаются.

Суммой комплексных чисел $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$, будет число $a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$

Т.е для того, чтобы сложить два комплексных числа, необходимо сложить их действительные и мнимые части.

Пример:

Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 5i$. Найти их сумму.

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 + 5i) = (2 + (-1)) + (3 + 5)i = 1 + 8i$$

Умножение комплексных чисел производится по формуле:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Пример:

Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 5i$. Найти их произведение.

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(-1 + 5i) = -2 + 10i - 3i + 15i^2 = -2 + 7i - 15 = -17 + 7i$$

Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают свойствами:

1. Коммутативность (переместительное) свойство сложения:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

2. Ассоциативность (сочетательное) свойство сложения:

$$z_1 + z_2 + z_3 = (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

3. Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 существует комплексное число z , такое, что $z_1 + z = z_2$. Это число называется **разностью** чисел z_1 и z_2 , и обозначается $z = z_2 - z_1$

4. Коммутативность (переместительное) свойство умножения:

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

5. Ассоциативность (сочетательное) свойство умножения:

$$z_1 z_2 z_3 = (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

6. Для любых комплексных чисел $z_1 \neq 0 + 0i$ и z_2 существует комплексное число z , такое что $z_1 z = z_2$. Это число называется **частным** от деления z_1 и z_2 и обозначается $z = \frac{z_2}{z_1}$

Деление на комплексное число $0+0i$ невозможно

7. Дистрибутивность (распределительное) свойство:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Числа $a+bi$ и $a-bi$ (числа, отличающиеся только знаком) называют **сопряженными (z^*)**

Пример:

Даны два комплексных числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 5i$. Найти их частное.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 z_1^*}{z_1 z_1^*} = \frac{(-1+5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{-2+3i+10i-15i^2}{4-6i+6i-9i^2} = \frac{-2+13i+15}{4+9} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$$



